IQRO JURNALI , IQRO JOURNAL, ИКРО ЖУРНАЛИ
ISSN:2181-4341| wordlyknowledge.uz/index.php/iqro
Volume 24. Issue 02. Noyabr ,2026

KASR TARTIBLI STURM-LIOUVILLE OPERATORLARINING SPEKTRAL XOSSALARI

Rahimova Munira Islombekovna
Osiyo Xalqaro Universiteti
1-kurs magistrant
https://doi.org/10.5281/zenodo.24287903

Annotatsiya. Mazkur maqolada kasr tartibli differensial operatorlar asosida shakllantiriladigan Sturm-Liouville tipidagi spektral masalalarning matematik xususiyatlari o‘rganiladi. Xususan, Riman-Liuvill va Kaputo kasr tartibli hosilalarining nazariy asoslari, xos qiymatlar va xos funksiyalar tushunchalari, spektrning tuzilishi hamda chegaraviy shartlarning yechimlarga ta’siri yoritiladi. Kasr tartibli operatorlarning klassik differensial operatorlardan farqli jihatlari va ularning matematik modellashtirishdagi ahamiyati tahlil qilinadi.
Kalit so‘zlar: kasr tartibli hosila, Sturm-Liouville operatori, spektral nazariya, xos qiymat, xos funksiya, Kaputo hosilasi, Riman-Liuvill hosilasi.

Matematik analiz va differensial tenglamalar nazariyasida spektral masalalar muhim ilmiy yo‘nalishlardan biri hisoblanadi. Klassik Sturm-Liouville nazariyasi ikkinchi tartibli differensial operatorlarning xos qiymatlari va xos funksiyalarini o‘rganishga asoslangan bo‘lib, matematik fizika, mexanika va tebranish jarayonlarini tadqiq etishda keng qo‘llaniladi. So‘nggi yillarda ushbu nazariyaning kasr tartibli operatorlarga tatbiq etilishi alohida ilmiy qiziqish uyg‘otmoqda.

Kasr tartibli hisoblash matematikada butun bo‘lmagan tartibli hosila va integrallarni o‘rganadi. Uning asosiy afzalligi shundaki, ko‘plab real jarayonlarda kuzatiladigan xotira effekti va nostandart dinamik xususiyatlarni matematik ifodalash imkonini beradi. Klassik differensial tenglamalarda tizimning joriy holati asosan mahalliy hosilalar orqali ifodalansa, kasr tartibli tenglamalarda yechimning oldingi holatlari ham jarayon dinamikasiga ta’sir ko‘rsatishi mumkin.

Kasr tartibli hosilaning keng tarqalgan ta’riflaridan biri Riman-Liuvill hosilasidir. Ikkinchi muhim yondashuv esa Kaputo hosilasi hisoblanadi. Ushbu ta’riflar matematik jihatdan o‘zaro bog‘liq bo‘lsa-da, boshlang‘ich shartlarni ifodalash va operatorning funksional xususiyatlari nuqtayi nazaridan farqlanadi. Ayniqsa, Kaputo hosilasi yordamida boshlang‘ich shartlarni klassik differensial tenglamalardagi kabi berish qulayligi uning amaliy modellashtirishdagi ahamiyatini oshiradi.

Kasr tartibli Sturm-Liouville masalasi umumiy holda quyidagi ko‘rinishda ifodalanishi mumkin:

$$
\mathcal{L}_{\alpha}u(x)=\lambda u(x),
\quad 0<x<1,
$$

bu yerda $\mathcal{L}_{\alpha}$ — kasr tartibli differensial operator, α — kasr tartib, λ — spektral parametr, $u(x)$ esa izlanayotgan funksiya hisoblanadi. Masalaning to‘liq aniqlanishi uchun tegishli chegaraviy shartlar ham beriladi. Agar ushbu tenglama nolga teng bo‘lmagan yechimga ega bo‘lsa, unga mos λ qiymati xos qiymat, yechim esa xos funksiya deb ataladi.

Spektral nazariyaning asosiy vazifalaridan biri xos qiymatlarning mavjudligi, haqiqiyligi, diskretligi va xos funksiyalarning o‘zaro munosabatlarini aniqlashdan iborat. Klassik o‘z-o‘ziga qo‘shma operatorlarda xos qiymatlarning haqiqiyligi va turli xos qiymatlarga mos xos

funksiyalarning ortogonalligi muhim natijalar hisoblanadi. Biroq kasr tartibli operatorlarda ushbu xususiyatlar avtomatik ravishda saqlanmaydi. Ularning bajarilishi operatorning ta'rifi, funksional fazo va chegaraviy shartlarga bog'liq.

E. Bas tomonidan olib borilgan tadqiqotlarda kasr tartibli singulyar Sturm-Liouville masalalarining spektral xususiyatlari o'rganilgan. Tadqiqot natijalarida muayyan shartlar ostida xos qiymatlarning haqiqiyligi va xos funksiyalarning ortogonalligi ko'rsatilgan [1]. Zayernouri va Karniadakis esa kasr tartibli Sturm-Liouville masalalarining analitik yechimlari hamda ularni sonli yaqinlashtirish usullarini tadqiq qilgan [2].

Mazkur yo'nalishdagi muhim masalalardan biri kasr tartibli operatorning spektri qanday shakllanishini aniqlashdir. Spektral parametrning qiymatlari tenglamaning yechimlariga bevosita ta'sir ko'rsatadi. Ayrim hollarda xos qiymatlarni aniqlash maxsus funksiyalar, jumladan, Mittag-Leffler funksiyasining nollarini o'rganish bilan bog'liq bo'ladi. Bu funksiya kasr tartibli differensial tenglamalar yechimlarida muhim o'rin tutadi.

2025-yilda Aleroev va Li tomonidan e'lon qilingan tadqiqotda Kaputo hosilasiga asoslangan ayrim kasr tartibli Sturm-Liouville masalalarida asosiy xos qiymat mavjud bo'lmasligi mumkinligi ko'rsatilgan [3]. Ushbu natija kasr tartibli spektral nazariyada klassik nazariyadagi xususiyatlarni barcha holatlarda qo'llash mumkin emasligini tasdiqlaydi.

Kasr tartibli Sturm-Liouville operatorlarini o'rganish nafaqat nazariy matematika, balki amaliy masalalar uchun ham muhimdir. Jumladan, viskoelastik materiallarning deformatsiyasi, anomal diffuziya, issiqlik almashinuvi va xotira effektiga ega dinamik tizimlarni matematik modellashtirishda bunday operatorlardan foydalanish mumkin. Spektral tahlil esa mazkur jarayonlarning barqarorligi, tebranish xarakteri va uzoq muddatli xatti-harakatlarini o'rganishga yordam beradi.

Shunday qilib, kasr tartibli Sturm-Liouville operatorlarining spektral xossalarini tadqiq etish zamonaviy matematik analizning dolzarb yo'nalishlaridan biridir. Xos qiymatlarning mavjudligi va tuzilishini aniqlash, xos funksiyalarning xususiyatlarini o'rganish hamda chegaraviy shartlarning ta'sirini baholash ushbu nazariyaning keyingi rivojlanishi uchun muhim ilmiy asos yaratadi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Bas E. Fundamental Spectral Theory of Fractional Singular Sturm-Liouville Operator. Abstract and Applied Analysis, 2013. DOI: 10.1155/2013/915830.
2. Zayernouri M., Karniadakis G. E. Fractional Sturm-Liouville Eigen-Problems: Theory and Numerical Approximation. Journal of Computational Physics, 252, 2013, pp. 495-517. DOI: 10.1016/j.jcp.2013.06.031.
3. Aleroev T. S., Li Y. The Fractional Sturm-Liouville Problem with the Caputo Derivative May Lose the Principal Eigenvalue. Fractional Calculus and Applied Analysis, 28, 2025, pp. 1706-1716. DOI: 10.1007/s13540-025-00429-x.