IQRO JURNALI , IQRO JOURNAL, ИКРО ЖУРНАЛИ
ISSN:2181-4341| wordlyknowledge.uz/index.php/iqro
Volume 24. Issue 01. Oktabr, 2026

HISOBLANUVCHI FUNKSIYALARNING CHEKSIZ OILALARIDA MINIMAL NOMERLANISHLARNING MAVJUDLIGI VA ROJERS YARIMTO‘RI STRUKTURASI

Karomova Nilufar
https://doi.org/10.5281/zenodo.23204364

Annotatsiya. Maqolada hisoblanuvchi funksiyalar (hisoblanuvchi sanoqli to‘plamlar) oilalarining nomerlanishlar nazariyasi doirasida minimal nomerlanishlar o‘rganiladi. Minimal nomerlanishning ekvivalent tavsifi keltiriladi, Fridberg nomerlanishlarining minimalligi isbotlanadi va minimal nomerlanishlar sinflari Rojers yarimto‘rida o‘zaro taqqoslanmaydigan elementlar to‘plamini (antizanjir) tashkil etishi ko‘rsatiladi. Natijalar minimal nomerlanishning mavjudligi va Rojers yarimto‘ri strukturasi orasidagi bog‘liqlikni aniqlashtiradi.
Kalit so‘zlar: nomerlanish, minimal nomerlanish, Rojers yarimto‘ri, Fridberg nomerlanishi, hisoblanuvchi oila, hisoblanuvchi funksiya.

Abstract. The paper studies minimal numberings of infinite families of computable functions (computably enumerable sets) within the theory of numberings. An equivalent characterization of minimality is given, Friedberg numberings are shown to be minimal, and the classes of minimal numberings are shown to form an antichain in the Rojers semilattice.
Keywords: numbering, minimal numbering, Rojers semilattice, Friedberg numbering, computable family.

Kirish. Nomerlanishlar nazariyasi konstruktiv obyektlar oilalarini natural sonlar yordamida kodlash masalasini o‘rganadi va hisoblanuvchilik nazariyasining mustaqil yo‘nalishi sifatida Yu. L. Ershov tomonidan shakllantirilgan[1]. Bu nazariyada asosiy savollardan biri berilgan oilaning turli hisoblanuvchi nomerlanishlari orasidagi o‘zaro munosabatni, ya’ni ularning keltirilish tartibini tavsiflashdir. Bunday nomerlanishlar sinflari Rojers yarimto‘rini hosil qiladi, uning strukturasi oilaning hisoblanuvchilik xossalarini aks ettiradi[2].

Rojers yarimto‘rida alohida o‘rinni minimal elementlar egallaydi. Nomerlanish minimal deyiladi, agar unga hisoblanuvchi tarzda keltiriladigan har bir nomerlanish o‘zi ham unga keltirilsa. Minimal nomerlanishlar oilaning “eng tejamkor” kodlashlarini beradi va ularning mavjudligi oilaning ichki tuzilishi bilan chambarchas bog‘liq. Birinchi muhim misol Fridberg tomonidan qurilgan: barcha hisoblanuvchi sanoqli to‘plamlar oilasi uchun takrorlanishsiz, ya’ni

[1] Ershov, Yu. L. (1973). Theorie der Numerierungen I. *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, 19*(1–5), 289–388.

[2] Badaev, S. A., Goncharov, S. S. (2000). The theory of numberings: Open problems. In P. Cholak, S. Lempp, M. Lerman, R. Shore (Eds.), *Computability theory and its applications: Current trends and open problems* (Contemporary Mathematics, Vol. 257, pp. 23–38). American Mathematical Society.

birqiymatli nomerlanish mavjud. Keyinchalik Gudel va Fridberg nomerlanishlarining mohiyatan farqli ekani aniqlandi[3].

Maqolaning maqsadi cheksiz oilalar uchun minimal nomerlanishlar tushunchasini tizimli bayon qilish, ularning elementar xossalarini to‘liq isbot bilan keltirish va Rojers yarimto‘rining tuzilishiga ta’sirini aniqlashdir. Quyida barcha tasdiqlar standart ta’riflar asosida isbotlanadi; mavzuning umumiy manzarasi uchun Rojers, Soare va Ershov asarlariga qarang.

Mavzuning dolzarbligi shundaki, nomerlanishlar nazariyasi nafaqat sof mantiqiy, balki konstruktiv algebra, hisoblanuvchi modellar nazariyasi va dasturlash tillari denotatsion semantikasi bilan ham bog‘lanadi[4]. Har bir sohada obyektlarni qanday kodlash mumkinligi va turli kodlashlar bir-biriga samarali o‘tkazilishi aynan keltirilish munosabati orqali ifodalanadi. Minimal nomerlanishlar bunday kodlashlar orasida qo‘shimcha “kamaytirib bo‘lmaydigan” kodlashlarni ajratib beradi.

Asosiy ta’riflar. Faraz qilaylik, S — hisoblanuvchi sanoqli to‘plamlarning (yoki, unga ekvivalent ravishda, qismiy hisoblanuvchi funksiyalarning) bo‘sh bo‘lmagan oilasi bo‘lsin. S ning nomerlanishi deb $\mathbb{N}$ ni S ga akslantiruvchi syuryektiv $\alpha: \mathbb{N} \to S$ akslantirishga aytiladi. α nomerlanish hisoblanuvchi deyiladi, agar $\{\langle n, x\rangle : x \in \alpha(n)\}$ to‘plam hisoblanuvchi sanoqli bo‘lsa. α nomerlanish Fridberg nomerlanishi deyiladi, agar u hisoblanuvchi va birqiymatli bo‘lsa[5].

S ning ikki α va β nomerlanishi uchun $\alpha \le \beta$ (α nomerlanish β ga keltiriladi) deb yoziladi, agar shunday umumhisoblanuvchi f funksiya mavjud bo‘lsa, barcha n uchun $\alpha(n) = \beta(f(n))$ bajariladi. $\alpha \equiv \beta$ — $\alpha \le \beta$ va $\beta \le \alpha$ bo‘lishini bildiradi. Bu munosabat oldindan tartib bo‘lib, hisoblanuvchi nomerlanishlarning ekvivalentlik sinflari to‘plami R(S) bilan belgilanadigan Rojers yarimto‘rini hosil qiladi (Ershov, 1977). Yuqori chegara quyidagicha beriladi:

$(\alpha \oplus \beta)(2n) = \alpha(n), \quad (\alpha \oplus \beta)(2n+1) = \beta(n).$

Ravshanki, $\alpha \oplus \beta$ hisoblanuvchi nomerlanish va $\alpha \le \alpha \oplus \beta$, $\beta \le \alpha \oplus \beta$.

1-ta’rif. Hisoblanuvchi α nomerlanish minimal deyiladi, agar S ning har bir hisoblanuvchi β nomerlanishi uchun $\beta \le \alpha$ munosabatdan $\alpha \le \beta$ kelib chiqsa. Boshqacha aytganda, α ning sinfi R(S) yarimto‘rining minimal elementi bo‘ladi.

Hisoblanuvchi γ nomerlanish universal (yoki bosh nomerlanish) deyiladi, agar S ning har bir hisoblanuvchi nomerlanishi unga keltirilsa, ya’ni γ — R(S) ning eng katta elementi bo‘lsa. Masalan, barcha hisoblanuvchi sanoqli to‘plamlar oilasi uchun $\gamma(e) = W_e$ (e-chi hisoblanuvchi sanoqli to‘plam) Gudel nomerlanishi universal bo‘ladi[6]. Fridberg nomerlanishi esa ikkinchi qutbni ifodalaydi: u har bir to‘plam uchun aynan bitta indeks beradi, universal nomerlanishda esa har bir to‘plamning indekslari cheksiz ko‘p.

---

[3] Pour-El, M. B. (1964). Gudel numberings versus Friedberg numberings. *Proceedings of the American Mathematical Society, 15*(2), 252–255.

[4] Ershov, Yu. L. (1999). Theory of numberings. In E. R. Griffor (Ed.), *Handbook of computability theory* (pp. 473–503). Elsevier.

[5] Friedberg, R. M. (1958). Three theorems on recursive enumeration. I. Decomposition. II. Maximal set. III. Enumeration without duplication. *The Journal of Symbolic Logic, 23*(3), 309–316.

[6] Rojers, H. (1967). *Theory of recursive functions and effective computability*. McGraw-Hill.

Minimal nomerlanishlarning xossalari.

1-taklif (ekvivalent tavsif). Hisoblanuvchi α nomerlanish minimal bo‘lishi uchun har bir umumhisoblanuvchi f funksiya uchun $\alpha\circ f$ syuryektiv bo‘lganda $\alpha \le \alpha\circ f$ bajarilishi zarur va yetarli.

Isbot. Agar $\beta \le \alpha$ bo‘lsa, ma’lum f uchun $\beta = \alpha\circ f$, shuning uchun β nomerlanish bo‘lgani uchun $\alpha\circ f$ syuryektiv bo‘ladi. Aksincha, syuryektiv $\alpha\circ f$ uchun $\alpha\circ f \le \alpha$ har doim o‘rinli. Shu sababli ta’rifdagi “har bir $\beta \le \alpha$” sharti “har bir syuryektiv $\alpha\circ f$” shartiga teng kuchli.

2-taklif (invariantlik). Agar α minimal va $\alpha \equiv \beta$ bo‘lsa, β ham minimal. Bundan tashqari, α minimal bo‘lsa, syuryektiv $\alpha\circ f$ nomerlanishlarning barchasi α ga ekvivalent va demak minimal.

Isbot. $\gamma \le \beta$ bo‘lsin. $\beta \le \alpha$ bo‘lgani uchun tranzitivlikka ko‘ra $\gamma \le \alpha$, minimallikdan $\alpha \le \gamma$ va $\beta \le \alpha \le \gamma$. Ikkinchi tasdiq uchun Taklif 1 ga ko‘ra $\alpha \le \alpha\circ f$, qarama-qarshi yo‘nalish esa doim o‘rinli, shuning uchun $\alpha\circ f \equiv \alpha$.

3-taklif. R(S) da universal nomerlanish γ minimal bo‘lishi uchun R(S) bir elementli bo‘lishi zarur va yetarli.

Isbot. γ minimal bo‘lsin. Ixtiyoriy β uchun $\beta \le \gamma$ (γ universal), minimallikdan $\gamma \le \beta$, demak barcha nomerlanishlar γ ga ekvivalent. Teskari yo‘nalish ravshan.

3-taklif va Khutoretskii teoremasi birgalikda quyidagini beradi: universal nomerlanishga ega, kamida ikki elementli hisoblanuvchi oilada universal nomerlanish minimal bo‘lmaydi, agar yarimto‘r bir elementli bo‘lmasa. Boshqacha aytganda, “eng boy” kodlash hech qachon “eng tejamkor” bo‘lmaydi.

Teorema 1. Har qanday Fridberg nomerlanishi minimal nomerlanishdir.

Isbot. α — Fridberg nomerlanishi va $\beta \le \alpha$ bo‘lsin, ya’ni $\beta(n) = \alpha(f(n))$ ma’lum umumhisoblanuvchi f uchun. Ixtiyoriy m uchun $\alpha(m) \in S$ va β syuryektiv bo‘lgani sababli, $\beta(n) = \alpha(m)$ bo‘ladigan n topiladi, ya’ni $\alpha(f(n)) = \alpha(m)$. α birqiymatli bo‘lgani uchun $f(n) = m$. Demak, f syuryektiv. Endi $g(m) = \mu n\,[f(n) = m]$ deb olamiz. f umumhisoblanuvchi va syuryektiv bo‘lgani uchun qidiruv har bir m da to‘xtaydi, ya’ni g umumhisoblanuvchi. Bunda $\beta(g(m)) = \alpha(f(g(m))) = \alpha(m)$, ya’ni $\alpha \le \beta$.

Izoh 1. Teorema 1 isbotidagi asosiy g‘oya shundaki, birqiymatlilik “teskari” akslantirishni hisoblanuvchi qilib beradi: α ning har bir qiymatiga yagona indeks mos kelgani uchun f ning qiymatlarini kuzatib borib, har bir m ga mos n ni cheklangan qadamda topish mumkin. Oiladagi bir elementning bir nechta indeksi bo‘lsa, bunday tanlash umuman olganda hisoblanuvchi bo‘lmasligi mumkin, shu sababli minimallik uchun birqiymatlilik yetarli, lekin zarur emas deb kutish tabiiy; zaruriylik masalasi 6-bo‘limda ochiq masala sifatida keltiriladi.

Teorema 1. Minimal nomerlanishlar mavjud bo‘lgan keng sinfni ko‘rsatadi: Fridberg nomerlanishiga ega har bir oila uchun R(S) da kamida bitta minimal element bor. Xususan, barcha hisoblanuvchi sanoqli to‘plamlar oilasi uchun Fridberg nomerlanishi mavjudligi bu oilada minimal nomerlanish borligini bildiradi. Shu bilan birga bu holatda Gudel nomerlanishi (yarimto‘rning eng katta elementi) minimal emas, chunki Rojers yarimto‘ri cheksiz bo‘ladi[7].

[7] Pour-El, M. B. (1964). Gudel numberings versus Friedberg numberings. *Proceedings of the American Mathematical Society, 15*(2), 252–255.

Teorema 2. Faraz qilaylik, α va β — R(S) da turli sinflarga tegishli minimal nomerlanishlar bo‘lsin. U holda ular o‘zaro taqqoslanmaydi, ya’ni na $\alpha \leq \beta$, na $\beta \leq \alpha$. Bundan tashqari, $\alpha \oplus \beta$ minimal emas.

Isbot. Aytaylik, $\alpha \leq \beta$. β minimal bo‘lgani uchun $\beta \leq \alpha$, ya’ni $\alpha \equiv \beta$, bu farazga zid. Simmetrik ravishda $\beta \leq \alpha$ ham mumkin emas. Endi $\alpha \oplus \beta$ minimal bo‘lsin. $\alpha \leq \alpha \oplus \beta$ bo‘lgani uchun minimallikka ko‘ra $\alpha \oplus \beta \leq \alpha$, shuning uchun $\beta \leq \alpha \oplus \beta \leq \alpha$, bu esa yuqorida isbotlangan taqqoslanmaslikka zid.

Natija 1. Agar R(S) yarimto‘rida eng kichik element mavjud bo‘lsa, unda aynan bitta minimal sinf bor va u eng kichik elementning o‘zi bo‘ladi. Agar S ning ikkita ekvivalent bo‘lmagan Fridberg nomerlanishi mavjud bo‘lsa, R(S) da eng kichik element yo‘q.

Isbot. λ — eng kichik element bo‘lsin. $\beta \leq \lambda$ dan $\lambda \leq \beta$ chiqadi (chunki λ eng kichik), ya’ni λ minimal. Agar μ ham minimal bo‘lsa, $\lambda \leq \mu$, shuning uchun $\mu \leq \lambda$ va $\mu \equiv \lambda$. Ikkinchi tasdiq Teorema 1 va Teorema 2 dan kelib chiqadi: ikkita ekvivalent bo‘lmagan Fridberg nomerlanishi ikkita turli minimal sinfni beradi, eng kichik element esa bitta minimal sinfga ega bo‘lishi kerak.

Misollar:

Misol 1 (bir elementli oila). S = {A} bo‘lsa, yagona nomerlanish o‘zgarmas akslantirish bo‘ladi va R(S) bir elementli. Bu holda yagona sinf bir vaqtda minimal, eng kichik va eng katta element hisoblanadi.

Misol 2 (chekli to‘plamlar oilasi). S — barcha chekli to‘plamlar oilasi va $\alpha(n) = D_n$ bo‘lsin, bunda D_n kanonik indeksi n bo‘lgan chekli to‘plam, ya’ni $D_n = \{i : n$ sonining ikkilik yozuvida i-razryad 1$\}$. Bu akslantirish birqiymatli va “$x \in D_n$” predikati hisoblanuvchi, demak α Fridberg nomerlanishi. Teorema 1 ga ko‘ra α minimal.

Misol 3 (bir elementli to‘plamlar oilasi). $S = \{\{k\} : k \in \mathbb{N}\}$ va $\alpha(k) = \{k\}$ bo‘lsin. α birqiymatli va hisoblanuvchi, shuning uchun u minimal. Endi β ixtiyoriy hisoblanuvchi nomerlanish bo‘lsin. Har bir n uchun $\beta(n) = \{h(n)\}$ bo‘ladigan yagona h(n) mavjud va uni $\{\langle n, x\rangle : x \in \beta(n)\}$ hisoblanuvchi sanoqli to‘plamini sanab chiqish orqali birinchi uchragan juftlikdan topish mumkin. Demak, h umumhisoblanuvchi va $\beta(n) = \alpha(h(n))$, ya’ni $\beta \leq \alpha$. α minimal bo‘lgani uchun $\alpha \leq \beta$, shuning uchun barcha hisoblanuvchi nomerlanishlar ekvivalent va R(S) bir elementli.

Misol 4 (barcha hisoblanuvchi sanoqli to‘plamlar oilasi). Bu holda Gudel nomerlanishi γ universal, Fridberg nomerlanishi α esa minimal. Taklif 3 va Khutoretskii natijasiga ko‘ra γ minimal emas, shuning uchun α va γ ekvivalent emas. Shu bilan Pour-El tomonidan o‘rganilgan Gudel va Fridberg nomerlanishlari orasidagi farq minimallik tilida ifodalanadi: biri R(S) ning yuqori chegarasida, ikkinchisi esa uning minimal elementi sifatida joylashgan.

Misol 3 ayniqsa o‘rgatuvchi: unda birqiymatli nomerlanish bir vaqtda eng katta element bo‘ladi, shuning uchun “minimal” va “universal” tushunchalari ustma-ust tushadi. Umuman, Teorema 1 va Taklif 3 dan har qanday Fridberg nomerlanishi universal bo‘lsa, R(S) bir elementli bo‘lishi kelib chiqadi. Bu hodisa nomerlanishlar nazariyasida “oilaning hisoblanuvchi tuzilishi juda sodda” holatining belgisidir.

Rojers yarimto‘ri strukturasi bilan bog‘liqlik. Cheksiz oilalar uchun yarimto‘rning hajmi haqidagi fundamental natija Khutoretskiiga tegishli: hisoblanuvchi oilaning kamida ikkita

elementi bo‘lsa, R(S) yoki bir elementli, yoki cheksiz bo‘ladi. Bu natija minimal nomerlanishlar mavzusiga bevosita ta’sir qiladi, chunki bir elementli holatda yagona sinf bir vaqtda eng kichik, eng katta va minimal bo‘ladi, cheksiz holatda esa minimal sinflar soni va ularning joylashuvi masalasi mazmunli bo‘lib qoladi.

Teorema 2 va Natija 1 minimal nomerlanishlar to‘plamining tuzilishi haqida quyidagi dixotomiyani beradi: R(S) da yoki bitta minimal sinf (u eng kichik element), yoki o‘zaro taqqoslanmaydigan kamida ikkita minimal sinf mavjud, yoki minimal sinflar umuman yo‘q. Oxirgi holat cheksiz kamayuvchi zanjirlar bilan bog‘liq va nomerlanishlar nazariyasida alohida tekshiriladi. Mezon sifatida oilaning Fridberg nomerlanishiga ega ekanligi yetarli shart beradi, zaruriylik masalasi esa umumiy holatda murakkab.

Natija 1 ning ikkinchi qismi amaliy ahamiyatga ega: Fridberg nomerlanishlari tuzilishini o‘rganishda ularning ekvivalentlik sinflarini sanash masalasi mustaqil ahamiyat kasb etadi. Agar oilada Fridberg nomerlanishlarining kamida ikkita sinfi mavjud bo‘lsa, Rojers yarimto‘ri eng kichik elementga ega bo‘lmaydi va uning pastki qismi murakkab tuzilishga ega bo‘ladi. Aksincha, barcha Fridberg nomerlanishlari o‘zaro ekvivalent bo‘lgan oilalar uchun minimal nomerlanishlar yagonaligi masalasi qo‘shimcha tekshirishni talab qiladi, chunki Fridberg bo‘lmagan minimal nomerlanishlar ham mavjud bo‘lishi mumkin.

Hisoblanuvchilik darajasini oshirish tabiiy umumlashtirishga olib keladi: hisoblanuvchi nomerlanishlar o‘rniga arifmetik ierarxiyaning Σ^0_n-hisoblanuvchi nomerlanishlari qaraladi. Bunda Rojers yarimto‘rlari $R_n(S)$ ning strukturasi sezilarli o‘zgaradi: masalan, Σ^0_n-hisoblanuvchi nomerlanishlar uchun to‘liqlik va universallik xossalari batafsil o‘rganilgan (Badaev et al., 2003), umumlashgan hisoblanuvchi nomerlanishlar uchun notrivial Rojers yarimto‘rlari mavjudligi ko‘rsatilgan (Goncharov & Sorbi, 1997). Teorema 1 va Teorema 2 ning isbotlari faqat keltirilish munosabatining oldindan tartib ekanligi va yuqori chegara mavjudligiga tayanadi, shuning uchun ularning mantiqiy qismi (Taklif 1, Teorema 2, Natija 1) har bir $n \geq 1$ uchun $R_n(S)$ da ham o‘z kuchini saqlaydi. Teorema 1 esa Fridberg nomerlanishining mos Σ^0_n-analogi mavjudligini talab qiladi.

Taklif 4 (algebraik shakl). L — ixtiyoriy yuqori yarimto‘r bo‘lsin. U holda L ning turli minimal elementlari o‘zaro taqqoslanmaydi va ularning yuqori chegarasi minimal emas. Agar L ning har bir elementi qandaydir minimal elementdan kichik emas bo‘lsa va faqat bitta minimal element mavjud bo‘lsa, shu element L ning eng kichik elementi bo‘ladi.

Isbot. Birinchi ikki tasdiq Teorema 2 isbotini so‘zma-so‘z takrorlaydi, faqat $\alpha \oplus \beta$ o‘rniga $a \vee b$ yuqori chegara olinadi. Uchinchi tasdiq uchun yagona minimal element μ bo‘lsin. Har bir $x \in L$ uchun shunday minimal m topiladiki, $m \leq x$. Yagonalikka ko‘ra $m = \mu$, demak $\mu \leq x$.

Taklif 4 maqoladagi mantiqiy natijalarning nomerlanishlarga xos bo‘lmagan, umumiy xarakterini ko‘rsatadi. Rojers yarimto‘rining o‘ziga xosligi esa ikkita holatda namoyon bo‘ladi: birinchidan, Teorema 1 orqali minimal elementlar mavjudligi aniq hisoblanuvchi konstruksiya (birqiymatlilik) bilan bog‘lanadi; ikkinchidan, Khutoretskii teoremasi yarimto‘rning hajmi haqida qat’iy chegara qo‘yadi.

Endi Σ^0_n-hisoblanuvchi nomerlanishlarga o‘tamiz. α nomerlanish Σ^0_n-hisoblanuvchi deyiladi, agar $\{\langle k, x\rangle : x \in \alpha(k)\}$ to‘plam arifmetik ierarxiyaning Σ^0_n sinfiga tegishli bo‘lsa, keltirilish esa avvalgidek umumhisoblanuvchi f funksiya orqali aniqlanadi. Bunday nomerlanishlarning

sinflari $R_n(S)$ yarimto‘rini hosil qiladi (Badaev et al., 2003). Ikki Σ^0_n-hisoblanuvchi nomerlanishning $\oplus$ yig‘indisi yana Σ^0_n-hisoblanuvchi bo‘ladi, chunki Σ^0_n sinfi juft va toq indekslar bo‘yicha birlashtirishga nisbatan yopiq. Shuning uchun Taklif 1, Teorema 2, Natija 1 va Taklif 4 $R_n(S)$ uchun ham to‘liq saqlanadi. Teorema 1 ni ko‘chirish uchun esa Σ^0_n-hisoblanuvchi va birqiymatli nomerlanish mavjudligi zarur, bunda $g(m) = \mu n\,[f(n) = m]$ funksiyaning umumhisoblanuvchiligi hamon saqlanadi, chunki f umumhisoblanuvchi.

Bu kuzatishlar quyidagi umumiy manzarani beradi. Birinchidan, minimal nomerlanishlar bilan bog‘liq “strukturaviy” xulosalar (antizanjir, yagona minimal sinfning eng kichik element bo‘lishi) hisoblanuvchilik darajasiga bog‘liq emas. Ikkinchidan, minimal elementning mavjudligi esa aynan oilaning hisoblanuvchi xossalariga bog‘liq: Fridberg nomerlanishi mavjud bo‘lgan oilalarda u kafolatlanadi, boshqa holatlarda esa alohida konstruksiya yoki yo‘qlik isboti talab etiladi. Uchinchidan, Rojers yarimto‘rining hajmi va minimal elementlar soni bir-biridan mustaqil bo‘lishi mumkin, shuning uchun bu ikki kattalikni birgalikda tavsiflash yangi tadqiqotlar uchun samarali yo‘nalish bo‘ladi.

Muhokama va ochiq masalalar. Keltirilgan natijalar minimal nomerlanishlar nazariyasining boshlang‘ich qatlamini tashkil qiladi. Quyidagi masalalar keyingi tadqiqotlar uchun dolzarb: (a) qanday cheksiz oilalar uchun R(S) da minimal element mavjud bo‘lishining zarur va yetarli shartlarini topish; (b) minimal sinflar sonining mumkin bo‘lgan qiymatlarini (bitta, chekli, sanoqli, kontinuum) tavsiflash; (c) Fridberg nomerlanishi mavjud bo‘lmagan oilalar uchun minimal nomerlanishlarni qurish yoki ularning yo‘qligini ko‘rsatish; (d) arifmetik ierarxiyaning yuqori pog‘onalarida minimallik xossasining o‘zgarishini tahlil qilish. Bu masalalarning ko‘pi ochiq masalalar ro‘yxatida keltirilgan.

Metodologik nuqtai nazardan, (a) masala eng birlamchi hisoblanadi. Taklif 1 minimallikni “$\alpha \leq \alpha\circ f$” ko‘rinishidagi hisoblanuvchi akslantirishlar tili orqali ifodalaydi, bu esa oilaning hisoblanuvchi tuzilishini (masalan, to‘plamlar orasidagi qamrash munosabatlari va ularning hisoblanuvchi taqribiy tavsifini) mezon shartlariga aylantirish yo‘lini ochadi. Natijada maqolada keltirilgan mantiqiy qism keyingi tadqiqotlarda yangi, oilaning aniq xususiyatlariga asoslangan mezonlarni olish uchun tayanch vazifasini o‘tashi mumkin.

Xulosa. Maqolada minimal nomerlanish tushunchasi uchun ekvivalent tavsif keltirildi, har qanday Fridberg nomerlanishining minimalligi isbotlandi va minimal nomerlanishlar sinflari Rojers yarimto‘rida antizanjir tashkil etishi ko‘rsatildi. Bundan eng kichik elementga ega yarimto‘rlar uchun minimal sinf yagona bo‘lishi, ikkita ekvivalent bo‘lmagan Fridberg nomerlanishi bo‘lsa, eng kichik element mavjud bo‘lmasligi kelib chiqdi. Natijalar minimal nomerlanishlarning mavjudligi va Rojers yarimto‘ri strukturasi orasidagi bog‘liqlikni aniq ko‘rsatadi va keyingi tadqiqotlar uchun asos bo‘lib xizmat qiladi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Ershov, Yu. L. (1973). Theorie der Numerierungen I. Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, 19(1–5), 289–388.
2. Badaev, S. A., Goncharov, S. S. (2000). The theory of numberings: Open problems. In P. Cholak, S. Lempp, M. Lerman, R. Shore (Eds.), Computability theory and its applications:

Current trends and open problems (Contemporary Mathematics, Vol. 257, pp. 23–38). American Mathematical Society.

3. Pour-El, M. B. (1964). Gudel numberings versus Friedberg numberings. Proceedings of the American Mathematical Society, 15(2), 252–255.
4. Ershov, Yu. L. (1999). Theory of numberings. In E. R. Griffor (Ed.), Handbook of computability theory (pp. 473–503). Elsevier.
5. Friedberg, R. M. (1958). Three theorems on recursive enumeration. I. Decomposition. II. Maximal set. III. Enumeration without duplication. The Journal of Symbolic Logic, 23(3), 309–316.
6. Rojers, H. (1967). Theory of recursive functions and effective computability. McGraw-Hill.
7. Pour-El, M. B. (1964). Gudel numberings versus Friedberg numberings. Proceedings of the American Mathematical Society, 15(2), 252–255.