IQRO JURNALI , IQRO JOURNAL, ИКРО ЖУРНАЛИ
ISSN:2181-4341| wordlyknowledge.uz/index.php/iqro
Volume 22 Issue 02 IYUL 2026

ТЕОРЕМА АБЕЛЯ И ТАУБЕРА ДЛЯ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ

Султамуратова Азиза
Математика
https://doi.org/10.5281/zenodo.21426176

Аннотация: В статье рассматриваются теоремы Абеля и Таубера для выпуклых функций, их основные идеи и применение в математическом анализе. Теоремы Абеля–Таубера устанавливают связь между поведением функции и её преобразованиями, а также позволяют исследовать асимптотические свойства функций при выполнении определённых условий. Особое внимание уделяется роли выпуклости как дополнительного условия, которое обеспечивает регулярность поведения функции и возможность получения обратных результатов. Показано, что выпуклые функции обладают свойствами монотонности и ограниченной изменчивости, благодаря чему становятся удобным объектом для применения тауберовских методов. Рассмотрены примеры простых выпуклых функций и показано, как их свойства связаны с интегральными преобразованиями и предельными процессами. Полученные результаты имеют значение для математического анализа, теории функций, теории приближений и прикладных задач.
Ключевые слова: теорема Абеля, теорема Таубера, выпуклые функции, интегральные преобразования, асимптотика, пределы функций, математический анализ, монотонность, теория функций.

Теория выпуклых функций является одним из важных разделов современного математического анализа. Выпуклые функции изучаются благодаря их многочисленным применениям в различных областях математики и науки. Они используются в задачах оптимизации, исследовании дифференциальных уравнений, экономических моделях, теории вероятностей и функциональном анализе.Главное свойство выпуклой функции состоит в том, что её график обладает определённой геометрической структурой. Если взять любые две точки графика функции и соединить их прямой линией, то эта линия будет находиться не ниже графика функции. Такое свойство приводит к важным аналитическим результатам: выпуклые функции имеют устойчивое поведение, их производные изменяются монотонно, а предельные характеристики могут быть исследованы более точно.

В математическом анализе часто возникает задача определить свойства функции не непосредственно, а через некоторое преобразование этой функции.Например, вместо самой функции можно рассматривать её интегральное преобразование. Одним из наиболее известных является преобразование Лапласа:

$$f(s)=\int 0^{\infty} e^{-sx} f(x)dx.$$

Здесь $F(s)$ является преобразованием функции $f(x)$. Изучение связи между $f(x)$ и $F(s)$ приводит к теоремам Абеля и Таубера.Теорема Абеля относится к прямым результатам. Она утверждает, что если функция обладает определёнными свойствами, то соответствующее преобразование сохраняет информацию о предельном поведении функции.[1]Например, если функция имеет определённый порядок роста, то её преобразование имеет соответствующий порядок изменения.

Теорема Таубера имеет обратную направленность. Она отвечает на вопрос: можно ли по поведению преобразования определить свойства исходной функции? Для решения этой задачи необходимо вводить дополнительные условия. Одним из таких условий является выпуклость.Выпуклость играет важную роль в теории Таубера, поскольку она ограничивает возможные колебания функции. Если функция может изменяться произвольно, то информация о её преобразовании недостаточна. Но для выпуклой функции её поведение становится более предсказуемым, что позволяет восстановить её свойства.

Например, функции:

$f(x)=x^2$,
$f(x)=x$,
$f(x)=e^x$ являются выпуклыми на соответствующих промежутках.

Изучение теорем Абеля и Таубера для выпуклых функций является актуальной задачей, поскольку данные результаты позволяют исследовать сложные процессы по ограниченной информации.[2]Они применяются при анализе физических процессов, вероятностных моделей, экономических функций и различных математических задач.

Цель данной работы состоит в рассмотрении основных положений теорем Абеля и Таубера для выпуклых функций, объяснении роли выпуклости и демонстрации применения этих результатов на простых примерах.

Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[0;\infty)$. Она называется выпуклой, если для любых двух точек x_1 и x_2 выполняется условие:

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\leq\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2).$$

где λ находится между 0 и 1.

Это означает, что значение функции внутри отрезка не превышает значения прямой линии между концами отрезка.

Примером выпуклой функции является:$f(x)=x^2$,

Её производные:

$$f'(x)=2x,$$
$$f''(x)=2.$$

Так как вторая производная положительна, функция является выпуклой.

Рассмотрим связь выпуклых функций с теоремой Абеля.

Если функция имеет предел:

$$f(x)\to A \text{ при } x\to\infty,$$

то её усреднённое значение также стремится к A.

Это означает, что преобразование функции сохраняет её предельное значение.Рассмотрим пример постоянной функции:$f(x)=3$.

Очевидно:

$$f(x)\to 3.$$

Любое среднее значение этой функции также равно 3.

Следовательно, преобразование сохраняет исходный результат.[3]

Теперь рассмотрим функцию:

$$f(x)=x$$

Она является выпуклой.

Её преобразование Лапласа имеет вид:

$$f(s)=\int 0^{\infty} xe^{-sx}dx.$$

После вычисления получаем:

$$F(s)=1/s^2.$$

Это показывает, что линейный рост функции связан с определённым поведением преобразования.

По теореме Абеля:если известно поведение функции, можно определить поведение преобразования.

Теперь рассмотрим обратную задачу.

Пусть известно:

$F(s)=1/s^2$.

Согласно идее теоремы Таубера, если функция обладает дополнительными свойствами, например выпуклостью, то можно сделать вывод:$f(x)$ примерно равно x таким образом, по поведению преобразования можно определить исходную функцию.

Рассмотрим ещё один пример:

$f(x)=x^2$,

Преобразование Лапласа:

$$F(s)=\int 0^{\infty} x^2e^{-sx}dx.$$

Вычисление даёт:

$$F(s)=2/s^3.$$

Если известно, что преобразование имеет вид $2/s^3$, то тауберовский подход позволяет определить, что исходная функция имеет квадратичный рост.

Выпуклость важна потому, что она обеспечивает устойчивость результата. Для произвольных функций возможны сильные колебания: функция может принимать большие и малые значения, сохраняя одно и то же среднее поведение. Но выпуклая функция ограничена геометрическими свойствами.

Рассмотрим пример последовательности:1, 2, 3, 4, 5, ...

Разности соседних членов:

$2-1=1$,

$3-2=1$,

$4-3=1$.

Такая последовательность имеет постоянный рост и является выпуклой.[4]Если известно её среднее поведение, можно определить общий характер изменения последовательности.

Теоремы Абеля и Таубера используются также при исследовании интегральных операторов.Например, если известна интегральная характеристика процесса, то с

помощью тауберовских условий можно получить информацию о первоначальной функции.В прикладных областях эти методы используются при анализе экономических моделей, где функции затрат часто являются выпуклыми. Также они применяются в физике при изучении процессов, когда доступны только усреднённые данные.Таким образом, теоремы Абеля и Таубера позволяют связать свойства функции с её преобразованиями и получить информацию о функции через косвенные характеристики.Теоремы Абеля и Таубера для выпуклых функций являются важным направлением математического анализа. Они позволяют исследовать связь между функцией и её преобразованием, а также решать обратные задачи восстановления свойств функций.

Основная роль теоремы Абеля заключается в установлении прямой зависимости между поведением функции и поведением её преобразования. Если известно, как функция изменяется при больших значениях аргумента, можно определить характер изменения связанного с ней преобразования.Теорема Таубера имеет более сложную задачу. Она позволяет определить свойства исходной функции по информации о её преобразовании. Однако для этого необходимы дополнительные условия. Выпуклость является одним из наиболее важных условий, поскольку она обеспечивает регулярность функции.Выпуклые функции обладают устойчивыми свойствами. Они не имеют резких колебаний, их рост можно контролировать, а предельные процессы исследовать более точно. Благодаря этому выпуклость широко используется при доказательстве тауберовских результатов.Рассмотренные примеры показали, что простые выпуклые функции, такие как $f(x)=x$ и $f(x)=x^2$, имеют чёткую связь между своим ростом и поведением преобразований. Это позволяет применять теоремы Абеля и Таубера для определения неизвестных характеристик функций.Практическое значение этих теорем состоит в том, что они позволяют работать с неполной информацией. Во многих научных задачах невозможно получить точное выражение функции, но можно исследовать её преобразование или среднее значение. Тауберовские методы дают возможность восстановить свойства исходного объекта.В настоящее время теоремы Абеля и Таубера применяются в различных областях: математическом анализе, теории вероятностей, физике, экономике и теории оптимизации.Таким образом, теория Абеля–Таубера для выпуклых функций является эффективным инструментом исследования предельного поведения функций. Она объединяет идеи выпуклого анализа, теории преобразований и асимптотических методов, что делает её важной частью современной математики.

Список литературы

1. Харди Г. Расходящиеся ряды. — Москва: Иностранная литература, 1951.
2. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — Москва: Физматлит, 2009.
3. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. — Москва: Наука, 1984.
4. Зорич В. А. Математический анализ. Том 2. — Москва: МЦНМО, 2019.
5. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 2. — Санкт-Петербург: Лань, 2021.
6. Качуровский Р. И. Выпуклые функции и их приложения. — Москва: Наука, 1985.
7. Никольский С. М. Курс математического анализа. — Москва: Наука, 1983.
8. Бурбаки Н. Функции действительного переменного. — Москва: Наука, 1965.