IQRO JURNALI , IQRO JOURNAL, ИКРО ЖУРНАЛИ
ISSN:2181-4341| wordlyknowledge.uz/index.php/iqro
Volume 22 Issue 01 IYUN 2026

KOMBINATORIKANING ASOSIY FORMULALARI. O'RINLASHTIRISHLAR, O'RIN ALMASHTIRISHLAR, GURUHLASHLAR

Nurkayev Shuhrat Jurayevich
Turin politexnika universiteti akademik litseyi
oliy toifali matematika fani o'qituvchisi
+998909280195

Annotatsiya: Ushbu mavzu kombinatorikaning asosiy elementlari va ularning amaliy ahamiyatini yoritishga bag'ishlangan. Unda to'plam elementlarini tartiblash va tanlash usullari — o'rin almashtirishlar, o'rinlashtirishlar hamda guruhlashlar tushunchalari, ularning takrorlanadigan va takrorlanmaydigan turlari batafsil tahlil qilinadi. Har bir tushunchaning matematik ifodalari, asosiy formulalari keltirilib, ularni hayotiy va mantiqiy masalalarni yechishda to'g'ri qo'llash qoidalari misollar yordamida tushuntiriladi. Mavzu ehtimollar nazariyasi, diskret matematika va dasturlash asoslarini mukammal egallashda muhim poydevor bo'lib xizmat qiladi.

Kalit so'zlar: Kombinatorika, Faktorial, O'rin almashtirishlar, O'rinlashtirishlar, Guruhlashlar, Kombinatsiyalar, Takrorlanmaydigan kombinatsiyalar, Takrorlanadigan kombinatsiyalar, Ko'paytirish qoidasi, Qo'shish qoidasi, Diskret matematika.

Аннотация: Данная тема посвящена изучению базовых понятий комбинаторики и их практического применения. В ней подробно рассматриваются основные способы выбора и расположения элементов множества — перестановки, размещения и сочетания, включая их виды с повторениями и без повторений. Приводятся математические формулы для каждого типа соединений, а также правила и алгоритмы их выбора при решении логических и прикладных задач. Тема служит фундаментальной основой для изучения теории вероятностей, дискретной математики и алгоритмизации в программировании.

Ключевые слова: Комбинаторика, Факториал, Перестановки, Размещения, Сочетания, Перестановки с повторениями, Сочетания без повторений, Правило умножения, Правило сложения, Дискретная математика

Annotation: This topic is dedicated to highlighting the fundamental elements of combinatorics and their practical significance. It provides a detailed analysis of methods for ordering and selecting set elements, namely permutations, arrangements, and combinations, including both their repeating and non-repeating types. The mathematical expressions and core formulas for each concept are presented, with examples illustrating the correct application rules for solving real-world and logical problems. The topic serves as an essential foundation for mastering probability theory, discrete mathematics, and the basics of programming.

Keywords: Combinatorics, Factorial, Permutations, Arrangements, Variations, Combinations, Combinations without repetition, Combinations with repetition, Multiplication rule, Addition rule, Discrete mathematics

Kirish. Ko'pgina amaliy masalalarni yechshda ma'lum bir xususiyatga ega bo'lgan elementlarni ob'ektlar to'plamidan tanlab olish va bu elementlarni ma'lum bir tartibda joylashtirish kerak bo'ladi. Bunday masalalar odatda ob'ektlarning ma'lum kombinatsiyalarini o'z ichiga olganligi sababli ular kombinatorika masalalari, matematikaning kombinatorika masalalarini o'rganadigan sohasi esa kombinatorika deb ataladi.

Kombinatorika masalalariga bir nechta misollar keltiramiz:

1. Har bir kesma 3 nuqtadan iborat bo'ladigan qilib to'g'ri chiziqqa 6 ta nuqta va 3 ta kesmani joylashtiring.

2. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 sonlarni shunday joylashtiringki, ular "sehrli kvadrat" ni, ya'ni barcha satrlar, barcha ustunlar va ikkala diagonal bo'ylab sonlar yig'indisi bir xil bo'lgan sonlarning kvadrat jadvalini tashkil qilsin.

3. 10 nafar o'g'il va 9 nafar qiz o'rtasida shaxmat o'yini uchun jamoa tanlashning nechta usuli borligini aniqlang.

4. 6 xonali raqamdan iborat portfelni ochish uchun nechta variantni tanlash kerak?

Bu misollar shuni ko'rsatadiki, kombinatorika masalalari quyidagilar zarur bo'lgan masalalarga bo'linadi: masalaning kamida bitta yechimini topish; masalaning barcha yechimlarini topish; masalaning barcha yechimlari sonini topish; masalani yechishning turli usullari orasidan optimal yechimni topish; masalaning yechimi yo'qligini isbotlash.

Biz faqat barcha yechimlar sonini topish talab qilinadigan kombinatorika masalalarini ko'rib chiqamiz.

Takrorli o'rinlashtirishlar.

Ta'rif. Bo'sh bo'lmagan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ to'plamlar berilgan bo'lsin. Ushbu to'plamlarning elementlaridan tuzilgan n uzunlikdagi tartiblangan chekli elementlar ketma-ketligi - $\alpha = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ko'rinishdagi har qanday chekli ketma-ketlikka aytiladi, bu yerda $x_k \in X_k$, $1 \le k \le n$.

x_k element α tartiblangan chekli elementlar ketma-ketligining k -chi koordinatasi deb ataladi.

Misol 1. $\{a,b,c\}$ va $\{1,2\}$ to'plamlardan uzunligi 2 bo'lgan 6 ta tartiblangan chekli elementlar ketma-ketligi tuzilishi mumkin:

$(a,1)$, $(a,2)$, $(b,1)$, $(b,2)$, $(c,1)$, $(c,2)$.

Misol 2. "Algebra" so'zi harflardan tuzilgan uzunligi 7 bo'lgan tartiblangan chekli elementlar ketma-ketligi hisoblanadi.

Misol 3. 13572 soni raqamlardan tuzilgan uzunligi 5 ga teng bo'lgan tartiblangan chekli elementlar ketma-ketligi.

Misol 4. Har qanday tartiblangan chekli to'plam koordinatalari har xil bo'lgan tartiblangan chekli elementlar ketma-ketligidir.

Ta'rif: Ikki tartiblangan chekli elementlar ketma-ketligining uzunligi bir xil bo'lsa va ularning bir xil pozitsiyadagi koordinatalari bir xil bo'lsa, teng deyiladi.

Misol 5. $(3,4,5)$ va $\left(\sqrt[3]{27}, \sqrt[3]{64}, \sqrt[3]{125}\right)$ tartiblangan chekli elementlar ketma-ketligilar teng, chunki ularning uzunligi bir xil va $3 = \sqrt[3]{27}$, $4 = \sqrt[3]{64}$, $5 = \sqrt[3]{125}$.

Misol 6. (a,b,c) va (b,a,c) tartiblangan chekli elementlar ketma-ketligilar teng emas(turli), ular bir xil uzunlikka va bir xil koordinatalar to'plamiga ega bo'lsa ham, bu koordinatalar turli tartibda joylashgan. (a,b,c) va (a,b,c,d) tartiblangan chekli elementlar ketma-ketligilar ham turli hisoblanadi, ular turli uzunliklarga ega.

Ta'rif: Hech qanday koordinatalarga ega bo'lmagan tartiblangan chekli elementlar ketma-ketligi bo'sh deyiladi.

Tartiblangan chekli elementlar ketma-ketligi va to‘plamni farqlash uchun bundan buyon tartiblangan chekli elementlar ketma-ketligilarni belgilash uchun figurali qavslardan foydalanamiz.

Ta'rif. Bo'sh bo'lmagan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ to'plamlar berilgan bo'lsin. Bu to'plamlarning dekart ko'paytmasi deb $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (bu yerda $x_k \quad X_k$, 1 $k \quad n$) ko’rinishdagi barcha tartiblangan chekli elementlar ketma-ketligilardan tashkil topgan to'plamga aytiladi.

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ to'plamlarning dekart ko'paytmasi $X_1 \quad X_2 \quad \ldots \quad X_n$ kabi belgilanadi.

Misol 7. A={a,b,c}, B={d,e} berilgan bo’lsin.
U holda A×B=(a,d),(a,e),(b,d),(b,e),(c,d),(c,e) va
B ×A={(d,a),(d,b),(d,c),(e,a),(e,b),(e,c)} bo’ladi.
Bu misol shuni ko'rsatadiki, umuman olganda, A ×B va B ×A Dekart ko’paytmalar turli hisoblanadi.
Misol 8. X to‘plamdagi elementlar soni m bo‘lsa, X to‘plamning elementlaridan hosil bo‘lishi mumkin bo‘lgan k uzunlikdagi barcha tartiblangan chekli elementlar ketma-ketligilar sonini toping.
Yechish: $X \quad X \quad \ldots \quad X$ Dekart ko‘paytmasidagi elementlar sonini topish talab qilinadi.
X to'plam m xil elementga ega bo'lganligi sababli keltirilgan Dekart ko’paytma ham m^k elementlarga ega bo'ladi.

Ta'rif. m elementli X to‘plamining elementlaridan tuzilgan k uzunlikdagi tartiblangan chekli elementlar ketma-ketligilar m elementdan k ta takrorli o’rinlashtirishlari deyiladi.

Bunday tartiblangan chekli elementlar ketma-ketligilar soni $\overline{A}_m^k$ bilan belgilanadi. Shunday qilib, $\overline{A}_m^k = m^k$ formula o’rinli bo’ladi.

Misol 9. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. o'nta raqam yordamida nechta 4 xonali son hosil qilish mumkin?

Yechish: To‘rt xonali sonlar $X=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ to‘plam elementlaridan tuzilgan, uzunligi 4 ga teng bo‘lgan tartiblangan chekli elementlar ketma-ketligilardir. Isbotlangan formulaga ko'ra, ularning soni

$\overline{A}_{10}^{4}=10^{4}=10000$ ga teng bo'ladi.

Misol 10. 5 xil konfetni uchta bolaga necha usulda taqsimlash mumkin?

Yechish: Ushbu misolda bolalar uchta elementdan iborat to'plamni tashkil qiladi va tartiblangan chekli elementlar ketma-ketligi uzunligi 5 ga teng deb hisoblashimiz mumkin. U holda $\overline{A}_{3}^{5}=3^{5}=243$. Demak, 5 ta konfetni uchta bolaga 243 usulda taqsimlash mumkin.

Takrorsiz o’rinlashtirishlar.

Endi m elementli X to'plamining elementlaridan k uzunlikdagi tartiblangan tartiblangan chekli elementlar ketma-ketligilar tuzamiz. Boshqacha qilib aytganda, elementlarni takrorlamasdan k uzunlikdagi tartiblangan chekli elementlar ketma-ketligilarni ko'rib chiqamiz.

Ta'rif. m elementli X to'plamining elementlaridan tashkil topgan k uzunlikdagi tartiblangan tartiblangan chekli elementlar ketma-ketligilari m ta elementdan k ta takrorsiz o’rinlashtirishlari deyiladi.

Bunday tartiblangan chekli elementlar ketma-ketligilar soni A_{m}^{k} bilan belgilanadi.

Misol 11. m elementdan k ta takrorisiz o’rinlashtirishlar sonini toping.

Yechish. Tartiblangan chekli elementlar ketma-ketligining birinchi koordinatasi X to'plamdagi har qanday elementlar bo'lishi mumkin. Ushbu elementlarning soni m bo'lgani uchun jami m ta usulni olamiz.

Agar birinchi element x_1 tanlangan bo'lsa, ikkinchi element faqat $m-1$ usul bilan tanlanishi mumkin. Xuddi shunday, agar ikkita x_1 va x_2 element tanlangan bo'lsa, x_3 uchinchi elementni faqat $m-2$ usul bilan tanlash mumkin va hokazo.

Shunday qilib, quyidagi formula o’rinli bo’ladi:

$A_{m}^{k}=m(m-1)(m-2)\ \dots\ (m-k+1)$.

Hosil qilingan formulani qisqacha quyidagicha yozish mumkin:

$$A_{m}^{k}=\frac{m!}{(m-k)!}.$$

Misol 12. 30 nafar o’quvchi orasidan sinf sardori va yordamchini tanlashning nechta usuli bor?

Yechish: Har bir tanlov 30 ta elementdan 2 ta elementni takrorsiz o’rinlashtirish hisoblanadi. Shunday qilib, usullar soni $A_{30}^{2}=30\ \ 29=870$ ga teng bo’ladi.

Takrorsiz o’rin almashtirishlar.

Agar takrorsiz o’rinlashtirish uzunligi X to'plamdagi m elementlar soniga teng bo'lsa, u holda barcha elementlar ushbu o’rinlashtirishda aynan bir marta uchraydi. Ikkita shunday o’rinlashtirishlar bir-biridan faqat shu elementlarning tartibi bilan farqlanadi.

Ta'rif. m elementli takrorsiz o'rin almashtirish deb ushbu elementlardan m bo'yicha takrorsiz o'rinlashtirishga aytiladi.

m elementning takrorsiz o'rin almashtirishlari soni P_m bilan belgilanadi.

$P_m = A_m^m = m(m-1)(m-2)\ldots(m-(m-1))$bo'lgani uchun P_m= m! formula o'rinli bo'ladi.

Misol 13. 10 kishiga 5 xil lavozimni necha xil usulda berish mumkin?

Yechish: Odamlar lavozimlarini 1,2,3,4,5 kabi nomerlab olamiz. x_k deb k nomerli lavozimga tayinlangan shaxsning ismini bildiramiz. U holda $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ - 5 kishining ismlarini o'rin almashtirishi bo'ladi va har bir o'rin almashtirishga lavozimga tayinlashning bitta va faqat bitta usuli mos keladi. Shuning uchun usullar soni $P_5 = 5! = 120$ ga teng bo'ladi.

Takrorsiz guruhlashlar.

Endi X to'plam elementlaridan tartiblangan chekli elementlar ketma-ketligilarni emas, balki turli qism to'plamlarni tuzamiz.

Ta'rif. m -elementli X to'plamining k -elementli qism to'plamlari bu to'plam elementlarining k bo'yicha takrorsiz guruhlashlari deyiladi. m elementdan k bo'yicha takrorsiz guruhlashlar soni C_m^k kabi belgilanadi.

m elementdan k bo'yicha takrorsiz guruhlashlar soni $C_m^k = \frac{A_m^k}{k!}$ yoki $C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!}$ formula yordamida hisoblanganligini isbotlashni o'quvchiga mashq sifatida taklif qilamiz.

Misol 14. Suzish bo'yicha musobaqada 8 nafar suzuvchi bo'lsa, 3 kishidan iborat jamoani necha xil usulda tuzish mumkin?

Yechish: usullar soni $C_8^3 = \frac{8!}{3!\ 5!} = \frac{6\ 7\ 8}{1\ 2\ 3} = 56$ ga teng bo'ladi.

Takrorli o'rin almashtirishlar.

Avval quyidagi misolni ko'rib chiqamiz. "Olma" so'zidagi harflarni o'rin almashtirish bilan jami $P_4 = 4! = 24$ so'zlar hosil bo'ladi. Yana to'rt harfli so'zni olaylik, masalan, "ozon". Bu so'zdagi harflarni o'rin almashtirish kamroq turli so'zlarni beradi, chunki ikkita "o" ni o'rin almashtirishi so'zni o'zgartirmaydi.

Bunday holda, biz takrorli o'rin almashtirish bilan shug'ullanamiz.

Ta'rif. $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m)$ harflardan iborat $(k_1, k_2, k_3, \ldots, k_m)$ tarkibli ketma-ketligining takrorli o'rin almashtirishi deb $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$ uzunlikka ega bo'lgan ixtiyoriy tartiblangan chekli elementlar ketma-ketligiga aytiladi, unda a_1 harf k_1 marta, a_2 harf k_2 marta va h.o. a_m harf k_m marta qatnashadi.

Bunday o'rin almashtirishlar soni $P_n(k_1,k_2,\ldots,k_m)$ bilan belgilanadi. Quyidagi formula o'rinli:

$$P_n(k_1,k_2,\ldots,k_m)=\frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}$$, bu yerda $n=k_1+k_2+\ldots+k_m$.

Misol 15. "Ozon" so'zidagi harflarni o'rnini o'zgartirish orqali nechta so'z yasash mumkin?

Yechish: "Ozon" so'zi uzunligi 4 ga teng bo'lgan tartiblangan chekli elementlar ketma-ketligi bo'lib, $(2;1;1)$ tarkibli shaklda tuzilgan: ("o" harfi ikki marta, "z" bir marta, "n" harfi bir marta paydo bo'ladi). Shuning uchun, o'rin almashtirishlar (so'zlar) soni

$$P_4(2;1;1)=\frac{4!}{2!\,1!\,1!}=\frac{1\ 2\ 3\ 4}{1\ 2\ 1\ 1}=12$$ ga teng bo'ladi.

Xulosa

Kombinatorikaning asosiy elementlari bo'lgan o'rinlashtirishlar, o'rin almashtirishlar va guruhlashlar ma'lum bir to'plam elementlari ustida amallar bajarish hamda turli hayotiy va ilmiy vaziyatlarni modellashtirishning fundamental poydevori hisoblanadi. O'tkazilgan tahlillar natijasida quyidagi muhim xulosalarga kelindi:

O'rin almashtirishlar berilgan barcha elementlarning faqatgina joylashuv tartibi o'zgarganda hosil bo'ladigan variantlarni o'rgansa, o'rinlashtirishlar ham elementlarning tarkibi, ham ularning joylashish tartibi muhim bo'lgan jarayonlarni hisoblab beradi.

Guruhlashlar (kombinatsiyalar) esa elementlarning joylashuv tartibiga mutlaqo bog'liq bo'lmagan, faqatgina ma'lum bir guruh tarkibini shakllantirish zarur bo'lgan masalalarni yechishda asosiy vosita vazifasini o'taydi.

Ushbu asosiy tushunchalar elementlar soni chekli bo'lgan tizimlarda sodir bo'lishi mumkin bo'lgan barcha ehtimoliy holatlarni aniq hisoblash imkonini beradi.

Xulosa qilib aytganda, kombinatorikaning ushbu tayanch qonuniyatlarini puxta o'rganish nafaqat klassik matematikaning boshqa bo'limlari, xususan, ehtimollar nazariyasi va matematik statistika uchun zamin yaratadi, balki bugungi kunda zamonaviy axborot texnologiyalari, dasturlash, ma'lumotlar xavfsizligi (kriptografiya) hamda murakkab algoritmlarni optimallashtirish sohalarida amaliy ahamiyatga ega bo'lgan eng muhim vosita bo'lib xizmat qiladi.

A D A B I Y O T L A R

1. Sh.A. Alimov, A.R. Xalmuhamedov, M.A. Mirzahmedov. Algebra va analiz asoslari. 10 – sinf uchun darslik. T., O'qituvchi, 2003.
2. Sh.A. Alimov, A.R. Xalmuhamedov, M.A. Mirzahmedov. Algebra va analiz asoslari. 11 – sinf uchun darslik. T., O'qituvchi, 2004.
3. А.Н. Колмогоров и др. Алгебра и начала анализа. Учебник для 10-11 классов средней школы. М., Просвещение, 1990 .
4. Н.Я. Виленкин, О.С. Ивашев-Мусатов, С.И. Шварцбурд. Алгебра и математический анализ для 10 классов. Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики. М., Просвещение, 1992.

5. Н.Я. Виленкин, О.С. Ивашев-Мусатов, С.И. Шварцбурд. Алгебра и математический анализ для 11 классов. Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики. М., Просвещение, 1998.
6. Э.М.Сайдаматов, А.К,Аманов, А.С.Юнусов, С.С.Хаджабагян. Алгебра и основы математического анализа., часть 1. Учебное пособие для учащихся академических лицеев с углубленным изучением математики. Т. «Ўқитувчи». 2016.
7. Э.М.Сайдаматов, А.К,Аманов, А.С.Юнусов, С.С.Хаджабагян. Алгебра и основы математического анализа. Часть 2. Учебное пособие для учащихся академических лицеев с углубленным изучением математики. Т. «Илм зиё». 2016.
8. Сканави и др. Сборник задач по математике для поступающих во ВТУЗы. М., Мир и образование, 2001.
9. М.А.Мирзахмедов, Ш.Н.Исмаилов, А.К,Аманов, Алгебра и начала анализа. Часть 1, 2.Учебник для 10 классов, средних образовательных учреждений и учащихся академических лицеев Т. ООО «Extremumpress». 2017.
10. М.А. Мирзахмедов, Ш.Н. Исмаилов, А.К, Аманов, Алгебра и начала анализа. Часть 1, 2.Учебник для 11 классов, средних образовательных учреждений и учащихся академических лицеев Т. «Zaminnashr». 2018.
11. Л.М. Лихтарников, Т.Г. Сукачева. Математическая логика. Санкт-Петербург, 1999 .