IQRO JURNALI , IQRO JOURNAL, ИКРО ЖУРНАЛИ
ISSN:2181-4341| wordlyknowledge.uz/index.php/iqro
Volume 22 Issue 01 IYUN 2026

КЛАССИЧЕСКАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С УСЛОВИЕМ РОБИНА

Хасанов Иброхим Ихтиёрович
преподаватель кафедры дифференциальных уравнений,
Бухарский государственный университет, г. Бухара, Узбекистан.
ihasanov998@gmail.com, i.i.hasanov@buxdu.uz

Нуриддинова Гузалой Азимбой кизи
студентка Бухарского государственного университета
nuriddinovagozaloy5@gmail.com

Аннотация: В работе исследуется начально-краевая задача для одномерного неоднородного уравнения теплопроводности с условием Робина на одном конце отрезка и условием Дирихле на другом конце. Для рассматриваемой задачи формули-руется понятие классического решения, указываются достаточные условия на начальную функцию и правую часть уравнения, а также доказываются суще-ствование и единственность классического решения.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, начально-краевая задача, условие Робина, условие Дирихле, классическое решение, существование решения, единствен-ность решения.

Уравнения параболического типа занимают важное место в теории дифференциальных уравнений в частных производных. Они возникают при математическом моделировании процессов теплопроводности, диффузии, фильтрации и других эволюционных процессов, в которых состояние системы изменяется с течением времени. Одним из наиболее важных представителей таких уравнений является одномерное уравнение теплопроводности. В классической постановке начально-краевые задачи для уравнения теплопроводности содержат начальное условие, описывающее началь-ное распределение температуры, а также граничные условия, характеризующие пове-дение искомой функции на концах рассматриваемого отрезка. В зависимости от физической природы процесса на границе могут задаваться условия Дирихле, Неймана или Робина. Условие Робина является смешанным граничным условием и связывает значение искомой функции с её производной по пространственной переменной. Такое условие часто возникает при описании теплообмена между телом и окружающей средой. В настоящей работе рассматривается начально-краевая задача для неоднородного уравнения теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \le T, \qquad (1)$$

с начальным условием

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad 0 \le x \le l, \qquad (2)$$

и смешанными граничными условиями

$$u(0,t) + \alpha u_x(0,t) = 0, \qquad 0 \le t \le T, \qquad (3)$$

$$u(l,t) = 0, \qquad 0 \le t \le T, \quad (4)$$

где $a > 0$, $l > 0$, $T > 0$, $\alpha > 0$ — заданные постоянные, $\varphi(x)$ — заданная началь-

ная функция, а $f(x,t)$ — известная правая часть уравнения.Основнойцелью работы является доказательство существования и единственности классического решения указанной задачи. Для этого сначала вводится точное определение классического решения, затем формулируются условия на функции φ и f, обеспечивающие корректность постановки задачи. Далее рассматривается соответствующая спектральная задача Штурма–Лиувилля с граничными условиями Робина и Дирихле. На основе разложения по собственным функциям строится представление решения в виде ряда Фурье. Сходимость полученного ряда и возможность почленного дифференцирования позволяют доказать существование классического решения. Единственность решения устанавливается при помощи энергетического метода.

Определение. *Функция* $u(x,t)$ *называется классическим решением задачи (1)-(4) если*

$$u \in C(\overline{Q}_T) \cap C^{2,1}(Q_T), \quad Q_T=(0,l)\times(0,T]$$

причём $u_x(0,t)$ *существует как односторонняя производная по* x *и является непрерывной функцией по* $t \in [0,T]$, *и функция и удовлетворяет уравнению в каждой точке* $(x,t) \in Q_T$, *начальному условию при* $t=0$ *и граничным условиям при* $x=0$ *и* $x=l$.

Рассмотрим соответствующую спектральную задачу

$$-X''(x) = \lambda X(x), 0 < x < l, \qquad (5)$$

$$X(0) + \alpha X'(0) = 0, X(l) = 0. \qquad (6)$$

Эта задача является регулярной самосопряжённой задачей Штурма–Лиувилля. Сле-довательно, её собственные значения вещественны, образуют возрастающую после-довательность

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots, \qquad \lambda_n \to +\infty,$$

а соответствующие собственные функции образуют полную ортонормированную систему в пространстве $L_2(0, l)$.

В случае положительных собственных значений $\lambda_n = \mu_n^2$ собствен-ные функции можно записать в виде

$$X_n(x) = sin\ \mu_n(l-x),$$

где числа μ_n являются корнями уравнения

$$tan(\mu l) = \alpha\mu. \qquad (7)$$

Обозначим через $\{Y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ нормированную систему собственных функций.
Искомое решение будем искать в виде ряда Фурье

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) Y_n(x). \qquad (8)$$

Разложим также функции φ и f по системе $\{Y_n\}$:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n Y_n(x), \quad f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) Y_n(x), \qquad (9)$$ где

$$\varphi_n = \int_0^l \varphi(x) Y_n(x)dx, \quad f_n(t) = \int_0^l f(x,t) Y_n(x)dx.$$

Подставляя (8) в уравнение (1) и используя равенство $Y_n''(x) = -\lambda_n Y_n(x)$,

получаем для коэффициентов $u_n(t)$ обыкновенные дифференциальные уравнения

$$u_n'(t) + a^2\lambda_n u_n(t) = f_n(t), \qquad u_n(0) = \varphi_n. \qquad (10)$$

Решение задачи (10) имеет вид

$$u_n(t) = \varphi_n e^{-a^2\lambda_n t} + \int_0^t e^{-a^2\lambda_n (t-\tau)} f_n(\tau)\, d\tau. \qquad (11)$$

Следовательно, формальное решение задачи (1)–(4) задаётся формулой

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\varphi_n e^{-a^2\lambda_n t} + \int_0^t e^{-a^2\lambda_n (t-\tau)} f_n(\tau)\, d\tau \right] Y_n(x) \qquad (12)$$

Теорема. *Пусть*

$$\varphi \in D(A^2), \qquad f(\cdot,t) \in D(A^2), \quad 0 \le t \le T$$

и функция f непрерывна по t со значениями в $D(A^2)$. Тогда задача (1)–(4) *имеет единственное классическое решение. Более того, это решение представимо в виде ряда* (12) *где* $\{Y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *- ортонормиро-ванная система собственных функций спектральной задачи*

$$-Y''(x) = \lambda Y(x), \qquad 0 < x < l,$$

$$Y(0) + \alpha Y'(0) = 0, \qquad Y(l) = 0$$

Докажем корректность этого представления. Пусть

$$\varphi \in D(A^2), \qquad f(\cdot,t) \in D(A^2), \quad 0 \le t \le T$$

причём f непрерывна по t со значениями в $D(A^2)$. Здесь

$$A = -\frac{d^2}{dx^2},$$

$$D(A) = \{v \in C^2[0,l] : v(0) + \alpha v'(0) = 0, \quad v(l) = 0\}$$

Эти условия являются достаточными условиями гладкости и согласованности начальных и граничных данных.

Так как $AY_n = \lambda_n Y_n$, то

$$\lambda^2 \varphi_n = (A^2\varphi, Y_n), \qquad \lambda^2 f_n(t) = (A^2 f(\cdot, t), Y_n).$$

Отсюда следует оценка

$$|\varphi_n| \le \frac{C}{\lambda_n^2}, \qquad |f_n(t)| \le \frac{C}{\lambda_n^2}, \qquad (13)$$

равномерная по $t \in [0, T]$. Поскольку $\lambda_n \sim Cn^2$, ряды, получающиеся из (12) после дифференцирования по t и дважды по x, сходятся равномерно на каждом компакте из Q_T.

Следовательно, функция $u(x, t)$, заданная формулой (12), принадлежит классу

$$u \in C(\overline{Q}_T), \qquad u_t, u_{xx} \in C(Q_T).$$

Кроме того, поскольку каждая собственная функция Y_n удовлетворяет граничным условиям

$$Y_n(0) + \alpha Y_n(0) = 0, \qquad Y_n(l) = 0,$$

то из равномерной сходимости соответствующих рядов следует

$$u(0, t) + \alpha u_x(0, t) = 0, \qquad u(l, t) = 0.$$

При $t = 0$ из (12) получаем

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n Y_n(x) = \varphi(x).$$

Наконец, дифференцируя ряд (12) почленно, имеем

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(t) Y_n(x).$$

С учётом (10) получаем

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} [-a^2 \lambda_n u_n(t) + f_n(t)] Y_n(x).$$

Но

$$u_{xx}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) Y''(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n u_n(t) Y_n(x).$$

Следовательно,

$$u_t(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t) + f(x, t).$$

Таким образом, функция (12) действительно является классическим решением задачи (1)–(4).Докажем теперь единственность. Пусть u_1 и u_2 — два классических решения задачи (1)–(4). Положим

$$w(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t).$$

Тогда w удовлетворяет однородной задаче

$$w_t = a^2 w_{xx}, \qquad (14)$$

$$w(x, 0) = 0, \qquad (15)$$

$$w(0, t) + \alpha w_x(0, t) = 0, \quad w(l, t) = 0. \qquad (16)$$

Рассмотрим коэффициенты Фурье функции w: $w_n(t) = \int_0^l w(x, t) Y_n(x)\, dx$.

Тогда

$w_n'(t) = \int_0^l w_t(x, t) Y_n(x) dx = a^2 \int_0^l w_{xx}(x, t) Y_n(x)\, dx$.Введите уравнение здесь.Интегрируя дважды по частям и учитывая граничные условия для w и Y_n, получаем

$$\int_0^l w_{xx} Y_n dx = \int_0^l w Y_n'' dx = -\lambda_n \int_0^l w Y_n dx$$

Следовательно,

$$w_n'(t) + a^2 \lambda_n w_n(t) = 0.$$

Из начального условия $w(x, 0) = 0$ имеем

$$w_n(0) = 0$$

Поэтому

$$w_n(t) \equiv 0$$

для всех n. Так как система $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ полна в $L_2(0, l)$, то

$w(x, t) \equiv 0.$

Следовательно,

$$u_1(x, t) = u_2(x, t).$$

Единственность доказана.

Итак, при указанных условиях задача (1)–(4) имеет единственное классическое решение, задаваемое рядом (12).

Список литературы

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.
2. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.
3. Ильин В.А. Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2009.
4. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1982.
5. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
6. Friedman A. Partial Differential Equations of Parabolic Type. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1964.
7. Evans L.C. Partial Differential Equations. Providence: American Mathematical Society, 2010.
8. John F. Partial Differential Equations. New York: Springer, 1982.
9. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. 4. М.: Наука, 1974.
10. Courant R., Hilbert D. Methods of Mathematical Physics. Vol. 2. New York: Interscience Publishers, 1962.
11. Zettl A. Sturm-Liouville Theory. Providence: American Mathematical Society, 2005.
12. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
13. Левитан Б.М., Саргсян И.С. Введение в спектральную теорию. М.: Наука, 1970.
14. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Интегральные уравнения. М.: Наука, 1976.
15. Folland G.B. Introduction to Partial Differential Equations. Princeton: Princeton University Press, 1995.