IQRO JURNALI , IQRO JOURNAL, ИКРО ЖУРНАЛИ
ISSN:2181-4341| wordlyknowledge.uz/index.php/iqro
Volume 22 Issue 01 IYUN 2026

DETERMINANTLARNING ASOSIY XOSSALARI TATBIQI

S.R.Qarordinov
Buxoro Davlat Universiteti Differensial tenglamalari kafedrasi o‘qituvchisi

Annotatsiya. Ushbu uslubiy material chiziqli algebraning fundamental tushunchalaridan biri — **determinantlar va ularning matematik xossalari**ga bag'ishlangan. Matnda determinantlarni hisoblash va shakl almashtirish jarayonlarini soddalashtirishga xizmat qiluvchi **9 ta asosiy xossa** hamda ularning uchburchak qoidasi va chiziqli bog'liqlik tushunchalariga asoslangan isbotlari keltirilgan.

Kalit so’zlar: Determinant, chiziqli algebra, xossalar, transponirlash, uchburchak qoidasi, chiziqli bog‘liqlik, satr va ustun amallari, isbot.

Annotation. This methodological material is dedicated to one of the fundamental concepts of linear algebra — determinants and their mathematical properties. The text presents 9 core properties that serve to simplify the processes of evaluating and transforming determinants, along with their proofs based on the triangle rule and the concept of linear dependence.

Key words: Determinant, linear algebra, properties, transposition, triangle rule, linear dependence, row and column operations, proof.

1-xossa. Determinantda hamma satrlar mos ustunlar qilib yozilsa, ya’ni transponirlanganda, determinatning qiymati o’zgarmaydi.

Isboti. Bu xossani isbot etish uchun ushbu

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (3)$$

tenglikning to’g’riligini ko’rsatish yetarli. Ammo (3) dagi har ikki determenantni uchburchak qoidasini qo’llanib hisoblasak. Bir xil natijaga kelamiz.

2-xossa. Determinantning biror satridagi (yoki biror ustunidagi) barcha elementlar nolga teng bo’lsa, bunday determinant nolga teng bo’ladi.

Isboti. Ushbu

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

har ikki determenantni uchburchak qoidasini qo’llanib hisoblasak har bir hadida nol qatnashadi. Bunday determinant nolga teng bo’ladi

3-xossa. Determinantda istalgan ikki satrni (yoki ikki ustunni) o’zaro almashtirsak, determinantning faqat ishorasi o’zgaradi.

Isboti. Bu xossaning to’g’riligiga berilgan determenantga va undan ikki satr yoki ikki ustunning o’rnini almashtirishda hosil bo’lgan determinantga uchburchak qoidasini bevosita

qo'llanish bilan ishonch hosil qilish mumkin. Jumladan, 1-va 3- ustunlarning o'rnini almashtirsak, Ushbu

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix}$$

tenglikka ega bo'lamiz.

4-xossa. Ikki satri (yoki ikki ustuni) teng bo'lgan, determinant nolga tengdir.

Isboti. (1) determinantning 1- va 2- satri elementlari mos ravishda bir-biriga teng bo'lsin,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta .$$

Shu determinantdagi bu satrlar o'rinlarini amlashtiramiz. U vaqtda, bir tomondan, 3-xossaga asosan determinantning qiymati o'z ishorasini o'zgartiradi. Lekin ikkinchi tomondan, o'zaro almashtirilayotgan satrlar bir xil bo'lgani uchun ularni o'zaro almashtirish determinant qiymatini o'zgartirmaydi. Demak, $\Delta = -\Delta$ tenglikka egamiz, bundan $2\Delta = 0$ yoki $\Delta = 0$ kelib chiqadi. Determinantning elementlari teng ikki ustunining o'rinlarinialmashtirishga tegishli mulohazalar ham shunga o'xshash yuritiladi.

5-xossa. Determinantning biror satridagi (yoki ustunidagi) barcha elementlarni aynan bitta songa ko'paytirilsa, u holda determinant ham shu songa ko'paytiriladi. Boshqacha aytganda, satrdagi (yoki ustundagi) barcha elementlarning umumiy ko'paytuvchisini determinant belgisi ostidan chiqarish mumkin.

Isboti. Dyeterminintning, masalan, birinchi satri elementlari uning uchinchi satri elementlari bilan proporsional, ya'ni $a_{11} = ma_{31}, a_{12} = ma_{32}, a_{13} = ma_{33}$ munosabatlar o'rinli bo'lsin deylik. Bu munosabatlardan foydalanib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ma_{31} & ma_{32} & ma_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} .$$

Oxirgi determinantning birinchi va uchinchi satrlari elementlari bir hil bo'lgani uchun 4-xossaga ko'ra uning qiymati nolga teng.

6-xossa. Biror satridagi barcha elementlari boshqa bir satrining mos elementlariga proporsional bo'lgan determinant nolga tengdir. Xuddi shunday ustunlar uchun ham o'rinli.

Isboti. (3) determinintning, masalan, birinchi satri elementlari uning uchinchi satri elementlari bilan proporsional, ya'ni $a_{11} = ma_{31}, a_{12} = ma_{32}, a_{13} = ma_{33}$ munosabatlar o'rinli bo'lsin deylik. Bu munosabatlardan foydalanib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ma_{31} & ma_{32} & ma_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = m \cdot 0 = 0$$

Oxirgi determinantning birinchi va uchinchi satrlari elementlari bir hil bo'lgani uchun 4-xossaga ko'ra uning qiymati nolga teng. Qolgan hollarda ham mulohazalar shu kabi yuritiladi. 1.2.-natija isbot bo'ladi

7-xossa. Agar determinantni i-satridagi barcha elementlar k ta qo'shiluvchidan iborat bo'lsa, u holda bu determinantni k ta determinantlarning yig'indisi ko'rinishida ifodalash mumkin bo'lib, bunda ularning i -dan farqli barcha satrlari berilgan deteminantdagidek, i - satri esa birinchi determinantda birinchi qo'shiluvchilardan ikkinchisida - ikkinchilaridan va h.k. tuzilgandir. Xuddi shunday, ustunlar uchun ham o'rinlidir. Xususiy holda bitta satrga boshqa bir satrni (ustunni) qo'shish (yoki undan ayirish) mumkin, ya'ni

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+b & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+c & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+d & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b & a_{13} \\ a_{21} & c & a_{23} \\ a_{31} & d & a_{33} \end{vmatrix}$$

8-xossa. Agar determinantning hech bo'lmaganda bitta satri boshqa satrlari orqali chiziqli bog'langan bo'lsa, bu determinant nolga tengdir. Aksincha, agar n- tartibli $(n>2)$ determinant nolga teng bo'lsa, u holda uning hech bo'lmaganda bitta satri boshqa satrlari orqali chiziqli ifodalangan bo'ladi. Xuddi shunday ustunlar uchun ham o'rinlidir.

9-xossa. Determinantda biror ustun (satr) ning hamma elemntlarini bitta m songa ko'paytirib, bu ko'paytmalarni boshqa ustun (satr) ning mos elementlariga qo'shsak, determinantning qiymati o'zgarmaydi.

Isboti. (3) determinintning qiymatini Δ deymiz, (3) determinintning bininchi satri elementlarini m ga ko'paytirib, ikkinchi satri elementlariga mos ravishda qo'shaylik (boshqa hollar uchun ham isbot shunga o'xshash bo'ladi). Ko'rilayotgan holda

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ma_{11} & a_{22}+m_{12} & a_{23}+ma_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Bu determinant qiymatini Δ_* deb belgilaylik. Biz $\Delta = \Delta_*$ ekanini ko'rsatishimiz lozim. 7-xossaga ko'ra qo'yidagiga egamiz:

$$\Delta_* = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ma_{11} & ma_{12} & ma_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta + 0 = \Delta$$

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Sh.A.Ayupov, B.A.Omirov, A.X.Xudoyberdiyev Chiziqli algebra . Darslik 2023 y.
2. А. С. Мищенко, Эрмитова K-теория. Теория характеристических классов, методы функционального анализа, УМН, 1976, том 31
3. С. П. Новиков , Алгебраическое построение и свойства эрмитовых аналогов Z-теории над кольцами с инволюцией с точки зрения гамильтонового формализма. Некоторые применения к дифференциальной топологии и теории характеристических классов. I, Изв. АН, сер. матем.