IQRO JURNALI , IQRO JOURNAL, ИКРО ЖУРНАЛИ
ISSN:2181-4341| wordlyknowledge.uz/index.php/iqro
Volume 22 Issue 01 IYUN 2026

КОМПАКТ ТЎПЛАМЛАР ВА ТИХОНОВ ТЕОРЕМАЛАРИ

D.R.Beshimova
Buxoro davlat universiteti
Drbeshimova@gmail.com

Annotasiya. Ushbu ishda topologik fazolar, topologik fazolar bazasi, kompakt to'plam tushunchalarining nazariy ahamiyati va amaliy qo'llanilishini chuqur o'rganilgan.

Kalit so'zlar: topologik fazolar, topologik fazolar bazasi, kompakt to'plam

Агар (X,τ) - топологик фазо ва $\{U_\alpha : \alpha \quad M\}$ - оиланинг барча элементлари очиқ (ёпиқ) тўпламлардан иборат бўлса, у ҳолда бундай қопламага очиқ (ёпиқ) қоплама дейилади.

Бирор X тўпламнинг қисм тўпламларидан иборат $\{U_\alpha : \alpha \quad M\}$ оила учун $\{U_\alpha : \alpha \quad M\} = X$ шарт бажарилса, у ҳолда $\{U_\alpha : \alpha \quad M\}$ оилага X тўпламнинг қопламаси дейилади.

1.Таъриф. (X,τ) - топологик фазо компактли дейилади, агар унинг ихтиёрий очиқ қопламасидан чекли қоплама ажратиб олиш мумкин бўлса.

Биз компакт деганда хаусдорф ва компактли фазоларни тушунамиз.

2.Таъриф. x нуқта $A \quad X$ тўпламнинг лимит нуқтаси дейилади, агар x нуқтанинг ихтиёрий атрофи A тўпламнинг чексиз нуқтасини ўз ичига олса.

x нуқта $A \quad X$ тўпламнинг қуюқланиш нуқтаси дейилади, агар x нуқтанинг ихтиёрий Ox атрофи ва $Ox \quad A$ тўпламлар бир хил қувватли бўлсалар.

3.Таъриф. (X,τ) - топологик фазо саноқли компактли дейилади, агар унинг ихтиёрий саноқли очиқ қопламасидан чекли қоплама ажратиб олиш мумкин бўлса.

1. Теорема. (X,τ) - топологик T_1 -фазо саноқли компакт бўлиши учун унинг ихтиёрий чексиз тўплам остиси лимит нуқтага эга бўлиши зарур ва етарлидир.

Исботи. Зарурлиги. Тескаридан фараз қиламиз. (X,τ) - топологик T_1 -фазода шундай чексиз A тўплам топиладики, у лимит нуқтага эга бўлмасин.

Исбот.Зарурлиги. Тескарисидан фараз қиламиз. (X,τ) топологик фазода шундай A чексиз тўплам топилиб, у лимит нуқтага эга бўлмасин. Бизга маълумки, ихтиёрий T_1 -фазода лимитга эга бўлмаган тўплам ёпиқ бўлади. Шунинг учун $X \setminus A$ тўплам очиқ бўлади. Демак, A тўплам ёпиқ ва лимит нуқтага нуқтага эга эмас, шунинг учун ихтиёрий $x \quad A$ нуқта шундай Ox атрофга эга бўлиб, $\{x\} = Ox \quad A$ шарт бажарилади. (X,τ) топологик фазонинг саноқли $\{X \setminus A, Ox_i, x_i \quad A, \ i \quad N\}$ очиқ қопламасидан чекли $\{X \setminus A, Ox_1, Ox_2, ..., Ox_k\}$ очиқ қоплама ажратиб олиш мумкин. У ҳолда A тўплам k та $x_1, x_2, ..., x_k$ нуқталардан иборат эканлиги келиб чиқади. Бу эса A тўпламнинг чексиз тўплам эканлигига зид.

Етарлилиги. Тескарисидан фараз қиламиз. (X,τ) топологик фазонинг шундай саноқли очиқ $\mu = \{U_1, U_2, ..., U_n, ...\}$ қопламаси топилиб, ундан чекли қоплама ажратиб

олиш мумкин бўлмасин. Фараз қилайликки, ихтиёрий $i=1,2,...$ учун U_{i+1} $\bigcup_{k=1}^{i} U_k$ шарт бажарилсин. Ҳар бир айирмадан $U_{i+1}\setminus\bigcup_{k=1}^{i} U_k$ биттадан x_i нуқтани ажратиб олиб, $A=\{x_1,x_2,...\}$ тўпламни ҳосил қиламиз. X топологик фазонинг ихтиёрий x нуқтасини олайлик. У ҳолда x нуқта μ очиқ қопламанинг қандайдир U_i элементига тегишли бўлади. U_i очиқ тўплам A тўпламнинг кўпи билан $x_1,...,x_{i-1}$ элементларини ўз ичига олади. Демак, A чексиз тўплам лимит нуқталарга эга эмас экан. Биз ихтиёрий чексиз тўплам остиси лимит нуқтага эга деган фаразимизга зид келдик. 1 теорема исбот бўлди.

4. Таъриф. (X,τ) топологик фазо финал компакт дейилади, агар унинг ихтиёрий чексиз очиқ қопламасидан саноқли очиқ қоплама ости ажратиб олиш мумкин бўлса.

1. Изоҳ. Ҳар қандай компакт фазо финал компакт фазо бўлади, лекин тескариси ҳар доим ҳам ўринли эмас экан.

1. Мисол. R - тўғри чизиқ табиий топология билан саноқли компакт фазо бўлиб, компакт фазо бўлмайди.

1. Тасдиқ. (X,τ) - финал компакт фазода ихтиёрий саноқсиз қувватли тўплам камида битта қуюқланиш нуқтага эга бўлади.

Исботи. Бизга саноқсиз τ қувватга эга бўлган A X тўплам берилган бўлсин. Фараз қилайлик, A тўплам қуюқланиш нуқтага эга бўлмасин. У ҳолда ихтиёрий x X нуқта шундай Ox атрофга эга бўлиб, $|Ox\ \ A|<\tau$ шарт бажарилади. Очиқ тўпламлар $\{Ox:x\ \ X\}$ оиласи X топологик фазонинг очиқ қопламаси бўлади. Бу қопламадан саноқли $\{Ox_1,Ox_2,...\}$ қоплама ости ажратиб олиш мумкин. A тўпламни қуввати $<\tau$ дан иборат A Ox_i тўплам остиларнинг йиғиндиси кўринишида ёзиш мумкин. Бизга маълумки, саноқли сондаги A Ox_i тўпламларнинг йиғиндиси яна саноқли тўплам бўлади. Бундан A тўпламнинг қуввати саноқли эканлиги келиб чиқади. 1 тасдиқ исботланди.

2. Теорема. X топологик фазо компакт бўлиши учун ихтиёрий чексиз тўплам остисининг қуюқланиш нуқтага эга бўлиши зарур ва етарлидир.

Исботи. Зарурлиги. X - топологик фазо компакт бўлсин. У ҳолда 1 изоҳга асосан X - топологик фазо финал компакт бўлади. 1 тасдиққа асосан X компакт фазонинг ихтиёрий чексиз тўплам остиси қуюқланиш нуқтага эга бўлади.

Етарлилиги. X топологик фазонинг ихтиёрий чексиз A тўплам остиси қуюқланиш x нуқтага эга бўлсин, яъни x нуқтанинг ихтиёрий Ox атрофи учун A ва Ox A тўпламларнинг қувватлари тенг бўлади. Бу эса x нуқтанинг A тўплам учун лимит нуқта эканлигини билдиради. 2 теорема исботланди.

5. Таъриф. X тўпламнинг тўплам остиларидан тузилган $\mu=\{F_\alpha:\alpha\ \ S\}$ - система марказлашган дейилади, агар μ ва системадаги ихтиёрий чекли $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k$ S элементлар учун F_{α_1} F_{α_2} ... F_{α_k} кесишма бўш бўлмаса.

3. Теорема. X топологик фазо компакт бўлиши учун X даги ихтиёрий марказлашган ёпиқ тўплам остилар оиласининг кесишмаси бўш бўлмаслиги зарур ва етарлидир.

Исботи. Зарурлиги. X компакт ва марказлашган ёпиқ тўплам остилар иборат бўлган $\mu=\{F_s : s \quad S\}$ оила берилган бўлсин. Тескарисидан фараз қиламиз, яъни $\{F_s : s \quad S\}=$ бўлсин. Ихтиёрий $s \quad S$ учун қуйидаги очиқ тўпламларни $U_s = X \setminus F_s$ қарайлик. Бундан

$$\{U_s : s \quad S\}= \quad \{X \setminus F_s : s \quad S\}= X \setminus \quad \{F_s : s \quad S\}= X \ ,$$

$\{U_s : s \quad S\}$ оиланинг X нинг қопламаси эканлиги келиб чиқади. X фазо компакт эканлигидан шундай чекли $\{U_{s_1},...,U_{s_k}\}$ очиқ тўпламлар топилиб, бу тўпламлар X нинг қопламаси бўлади. Бундан

$$X = \bigcup_{i=1}^{k} U_{s_i} = \bigcup_{i=1}^{k} \left(X \setminus F_{s_i}\right)= X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} F_{s_i} \ ,$$

келиб чиқади. Бундан $\bigcap_{i=1}^{k} F_{s_i} =$ эканлиги келиб чиқади. Бу эса $\mu=\{F_s : s \quad S\}$ системанинг марказлашган эканлигига зид. Демак, $\{F_s : s \quad S\}$ экан.

Етарлилиги. X топологик фазодаги ихтиёрий марказлашган ёпиқ тўпламлар оиласининг кесишмаси бўш бўлмасин. X нинг компакт эканлигини кўрсатамиз. Очиқ $\eta=\{U_s : s \quad S\}$ тўпламлар оиласи X нинг ихтиёрий очиқ қопламаси бўлсин. Фараз қилайлик, $\eta=\{U_s : s \quad S\}$ нинг ихтиёрий чекли тўплам остиси X ни қопламасин. У ҳолда $\{F_s = X \setminus U_s : s \quad S\}$ - ёпиқ тўпламлар оиласи марказлашган бўлади. Шартга кўра $\{F_s = X \setminus U_s : s \quad S\}= F$ бўлади. Ёпиқ марказлашган тўпламларнинг тўлдирма тўпламларини қарайлик.

$$X \setminus F = X \setminus \bigcap\{X \setminus U_s : s \quad S\}= X \setminus X \setminus \left(\bigcup\{U_s : s \quad S\}\right)=\bigcup\{U_s \ : s \quad S\} \quad X \ .$$

Бундан $\eta=\{U_s : s \quad S\}$ системанинг очиқ қоплама эканлигига зиддир. Демак, X компакт экан. 3 теорема исботланди.

4. Теорема. Компакт X фазонинг ихтиёрий F - ёпиқ фазо остиси компакт бўлади.

Исботи. X компакт фазо ва F - унинг ёпиқ фазо остиси бўлсин. F нинг ихтиёрий очиқ $\mu=\{U_s : s \quad S\}$ қопламасини қарайлик. У ҳолда $\mu_1=\{U_s : s \quad S\}$ $(X \setminus F)$ очиқ тўпламлар оиласи X фазонинг очиқ қопламаси бўлади. X фазо компакт бўлганлигидан шундай чекли $\{U_{s_1},...,U_{s_n}, X \setminus F\}$ очиқ тўпламлар оиласи топиладики, бу оила X фазони қоплайди. Бундан $\{U_{s_1},...,U_{s_n}\}$ оила ости F ёпиқ тўпламни қоплаши келиб чиқади. Демак F - компакт экан. 4 теорема исботланди.

5.Теорема. Хаусдорф X - фазодаги ҳар қандай F - компакт фазо остиси ёпиқ бўлади.

Исботи. X - хаусдорф фазо ва F - компакт фазо остиси берилган бўлсин. F нинг X да ёпиқлигини кўрсатамиз. Бунинг учун $X \setminus F = G$ тўпламнинг очиқ эканлигини кўрсатамиз. F компактга тегишли ихтиёрий y нуқтани олайлик. G га тегишли ихтиёрий $x \quad G$ нуқтани олайлик. X фазонинг хаусдорфлигидан x, y нуқталарнинг шундай $O_y(x),\ O_x(y)$ атрофлари топилиб, $O_y(x) \quad O_x(y)=$ шарт бажарилади. y нуқтани F компакт бўйича силжитамиз. У ҳолда $\{O_x(y) : y \quad F\}$ очиқ тўпламлар F тўпламни

қоплайди. F нинг компактлигидан шундай чекли $\{O_x(y_1),...,O_x(y_n)\}$ очиқ тўпламлар топилиб, $F = O_x(y_1)$ ... $O_x(y_n)$ шарт бажарилади. У ҳолда $Ox = \bigcap_{i=1}^{n} O_{y_i}(x)$ очиқ тўплам x нуқтанинг атрофи бўлиб, F тўплам билан кесишмайди, яъни Ox $X \setminus F$. Бу эса $X \setminus F$ тўпламнинг очиқ эканлигини исботлайди. Демак, F тўплам X да ёпиқ экан. 5 теорема исботланди.

6. Теорема. Хаусдорф фазосидаги ҳар қандай компакт фазо нормал бўлади.

Исботи. Биз аввало X компакт фазонинг регуляр фазо эканлигини исботлаймиз, яъни ихтиёрий x X нуқта ва бу нуқтани ўз ичига олмаган ихтиёрий B X ёпиқ тўпламлар учун шундай $O(x)$ ва $O(B)$ атрофлар топилиб, $O(x)$ $O(B) =$ шарт бажарилишини текширамиз. Бунинг учун x нуқта ва ихтиёрий y B нуқталар учун ўзаро кесишмайдиган $O_y(x)$ ва $O(y)$ атрофлар оламиз. y нуқтани B тўплам бўйича силжитиб чиқамиз. Натижада $O(y)$ очиқ тўпламлар B тўпламни қоплайди. B тўпламнинг компактлигидан шундай чекли $O(y_1),...,O(y_n)$ очиқ тўпламлар топилиб, $O(y_1)$ ... $O(y_n)$ B шарт бажарилади. Бунга мос $O_{y_1}(x)$, $O_{y_2}(x)$,..., $O_{y_n}(x)$ тўпламларни оламиз, натижада $O_{y_1}(x)$ $O_{y_2}(x)$ ... $O_{y_n}(x) = Ox$ тўплам x нуқтанинг атрофи бўлиб, $O(B) = O(y_1)$ $O(y_2)$ ... $O(y_n)$ билан умумий нуқтага эга эмас. Демак, X компакт регуляр фазо экан.

Энди X - компакт фазонинг нормал эканлигини исботлайлик. X компакт фазонинг ихтиёрий иккита A ва B ўзаро кесишмайдиган ёпиқ тўплам остилари берилган бўлсин. A нинг ихтиёрий x A нуқтаси ва B тўпламлар учун юқоридаги мулоҳаза каби ўзаро кесишмайдиган Ox ва $O_x(B)$ атрофлар топилади. x нуқтани A тўплам бўйича силжитиб чиқсак, у ҳолда Ox лар тўплами A тўпламни қоплайди. Демак, шундай чекли $O(x_1), O(x_2),..., O(x_k)$ тўпламлар оиласи мавжуд бўлиб, бу оила A тўпламни қоплайди. $O(A) = O(x_1)$ $O(x_2)$ ... $O(x_k)$ тўплам $O(B) = O_{x_1}(B)$ $O_{x_2}(B)$ ... $O_{x_k}(B)$ тўплам билан умумий нуқтага эга эмас экан.

Шундай қилиб, A ва B тўпламлар ўзаро $O(A)$ ва $O(B)$ атрофларга эга экан. Демак, X компакт фазо нормаль фазо экан. 6 теорема исботланди.

7.Теорема. Агар X компакт фазо Y фазо устига акслanса, у ҳолда Y фазо ҳам компакт бўлади.

Бошқача айтганда, компакт фазонинг узлуксиз образи яна компакт бўлади.

Исботи. Бизга X - компакт фазо ва $f: X \to Y$ - узлуксиз “устига” акслантириш берилган бўлсин. $f(X) = Y$ фазонинг компакт эканлигини исботлаймиз. Y фазонинг ихтиёрий $\mu = \{U_\alpha : \alpha$ $A\}$ - очиқ қопламасини қарайлик. f акслантиришнинг узлуксизлигидан ихтиёрий α A учун U_α Y очиқ тўплам учун $f^{-1}(U_\alpha)$ тўплам X да очиқ тўплам бўлади ва $\{f^{-1}(U_\alpha) : \alpha$ $A\} = X$ шарт бажарилади. X нинг компактлигидан, шундай чекли $f^{-1}(U_1),...,f^{-1}(U_n)$ очиқ тўпламлар топилиб, $\{f^{-1}(U_{\alpha_i i}) : i = 1,2,...,n\} = X$ шпрт бажарилади. Бундан $f(\{f^{-1}(U_{\alpha_i}) : i = 1,2,...,n\}) = \{U_{\alpha_i} : i = 1,2,...,n\} = Y$ эканлиги келиб чиқади. Демак, Y фазо компакт экан. 7 теорема исботланди.

1. Натижа. Агар $f:X\to Y$ - акслантириш узлуксиз бўлиб, X компакт фазони Y хаусдорф фазога акслантирса, у ҳолда ихтиёрий $A \quad X$ тўплам учун $\left[f(A)\right]=f\left[A\right]$ шарт бажарилади.

8. Теорема. Ихтиёрий компакт фазони хаусдорф фазосига узлуксиз акслантириш ёпиқ акслантириш бўлади.

Исботи. f - узлуксиз акслантириш X компакт фазони Y хаусдорф фазосига акслантириш берилган бўлсин. f - акслантиришнинг ёпиқлигини кўрсатамиз. X компакт фазодаги ихтиёрий $F \quad X$ ёпиқ тўпламни олайлик. 4 теоремага асосан F - компакт тўплам X да ёпиқ тўплам бўлади. 7 теоремага асосан $f(F)$ тўплам Y да компакт бўлади. 5 теоремага асосан $f(F)$ тўплам Y да ёпиқ бўлади. Демак, f - акслантириш ёпиқ экан. 8 теорема исботланди.

9. Теорема. Ўзаро бир қийматли узлуксиз компакт фазони хаусдорф фазосига акслантириш гомеоморфизм бўлади.

Исботи. X - компакт фазо, f - акслантириш эса X - компакт фазони Y - хаусдорф фазога ўзаро бир қийматли узлуксиз акслантириш бўлсин. f - акслантиришнинг гомеоморфизм эканлигини кўрсатамиз. 8 теоремага асосан f - ёпиқ акслантириш бўлади.

Энди $f^{-1}:Y\to X$ акслантиришнинг узлуксизлигини кўрсатамиз. Компакт X фазодан ихтиёрий ёпиқ $F \quad X$ тўплам олайлик. У ҳолда 4 теоремага асосан F компакт бўлади. Бу компакт тўпламнинг прообразини $\left(f^{-1}\right)^{-1}(F)=f(F)$ қарайлик. 7 теоремага асосан $f(F)$ тўплам Y фазода компакт бўлади. 5 теоремага асосан $f(F)$ тўплам Y фазода ёпиқ бўлади. Демак, f акслантириш гомеоморфизм экан. 9 теорема исбот бўлди.

10. Теорема. Компакт X фазода аниқланган ҳар қандай узлуксиз $f:X\to R$ акслантириш чегараланган бўлиб, ўзиннг минимум ва максимум қийматларни қабул қилади.

Исботи. Бизга компакт X фазода аниқланган узлуксиз $f:X\to R$ акслантириш берилган бўлсин. 7 теоремага асосан $f(X)$ тўплам R тўғри чизиқда компакт ва 8 теоремага асосан у ёпиқ бўлади. Агар $f(X)$ тўплам тўғри чизиқда чегараланмаган бўлса, у ҳолда $U_n=(-n,n)$ интерваллар тўпламидан $f(X)$ ни қоплайдиган чекли қоплама ажратиб олиш мумкин бўлмайди. Демак, $f(X)$ - чегараланган экан. Фараз қилайлик, $A=\sup\{f(x):x \quad X\}$, $B=\inf\{f(x):x \quad X\}$ бўлсин. У ҳолда A ва B - нуқталар $f(X)$ нинг уриниш нуқталари бўлади. $f(X)$ - ёпиқ тўплам бўлганлигидан $A,B \quad f(X)$ бўлади. Демак, $f(X)$ - тўплам чегараланган ёпиқ тўплам бўлиб ўзиннг минимум ва максимум қийматларни қабул қилади. 10 теорема исбот бўлди.

Adabiyotlar

1. Федорчук В.В. Введение в топологию. Москва, 2014.
2. Нарманов А.Я. Дифференциал геометрия. Тошкент, 2018 й.
3. Narmanov A.Ya. Analitik geometriya. Toshkent, 2020 y.