IQRO JURNALI , IQRO JOURNAL, ИКРО ЖУРНАЛИ
ISSN:2181-4341| wordlyknowledge.uz/index.php/iqro
Volume 21 Issue 2 May 2026

UCH KARRALI INTEGRALLARNING MEXANIK MASALALARGA TADBIQLARI

Qo‘ziboyeva Nozima Yoqibjon qizi
Toshkent kimyo-texnologiya instituti Yangiyer filiali o‘qituvchisi,
Yangiyer, O‘zbekiston

Muhammadiev Maqsudbek Mansur o‘g‘li
Guliston davlat universiteti talabasi,
Guliston, O‘zbekiston
Doi: https://doi.org/10.5281/zenodo.20289663

Annotatsiya. Mazkur tadqiqot ishida, geometrik va fizik masalalarni uch karrali integral yordamida oson usullarda yechish, geometrik isbotlashlarda qulayliklar yaratish masalasi ko‘rib chiqilgan. Uch karrali integralning nazariy asoslari va ularning geometrik va fizik masalalarga tadbiqlari o‘rganilgan.

Аннотация. В данной исследовательской работе рассматривалась проблема решения геометрических и физических задач простыми способами с использованием тройного интеграла, создающая удобство в геометрических доказательствах. Изучаются теоретические основы тройного интеграла и их приложения к геометрическим и физическим задачам.

Annotation. In this research work, the problem of solving geometric and physical problems in simple ways using the triple integral, which creates convenience in geometric proofs, was considered. The theoretical foundations of the triple integral and their applications to geometric and physical problems are studied.

KIRISH

Hozirgi zamon matematikasi boshqa tabiiy fanlar bilan birga yangi muammolarni hal qilmoqda. Masalan, mexanikada karrali integrallar yordamida og‘irlik markazi, inersiya momentlari va boshqa kattaliklarni hisoblash osonroq bo‘ladi. Shuningdek, vektor analiz elementlari yordamida mexanik qonunlarini matematik modeli tuzilib hisoblashlari matematik jarayonga keltiriladi. Shuning uchun ushbu mavzu muhim nazariy va amaliy ahamiyatga egadir.

Uch karrali integral va uning geometriya, mexanikada tadbiqlarini o‘rganish dolzarb mavzu hisoblanadi. Chunki bu mavzu fizika, mexanika va matematika fanlarini uzviy bog‘liqligini bildirib turadi. Integral hisobni matematik fizika va mexnika masalalarida qo‘llaganimizda ko‘proq vektor formadan foydalanish qulayroq bo‘ladi. Shuning uchun vektor analiz tushunchalari hamda integral formulalarni vektor ko‘rinishlarini o‘rganish muhim ahamiyatga ega hisoblanadi.

ADABIYOTLAR TAHLILI VA METODLAR

“Geometrik va fizik masalalarda uch karrali integral” mavzusini yoritishda Sh.O.Alimov, R.R.Ashurovlarning “Matematik analiz”, T.Azlarov, H.Mansurovlarning “Matematik analiz”, G.Fixtengoltsning “Курс дифференциального и интегрального исчисления” (II tom) kabi adabiyotlar tahlil qilindi.

Karrali integrallar nazariyasining metodlaridan foydalanib yechish mumkin bo‘lgan amaliy mazmundagi geometrik va fizik masalalarda misol va masalalarni A.Sa’dullayev va boshqalarning “Matematik analiz kursidan misol va masalalar to‘plami” (2-tom), B.P.Demidovichning “Сборник задач и упражнений по математическому анализу”,

G.Fixtengoltsning “Курс дифференциального и интегрального исчисления” (II tom) va boshqa adabiyotlardan topish mumkin.

NATIJALAR VA MUHOKAMA

Tabiiyki, barcha geometrik va mexanik kattaliklar fazodagi (V) jismning massasiga bog‘liqdir. Bunday holni uch karrali integral orqali ifodalaymiz [2, 3].

ρ orqali (V) jismning ixtiyoriy nuqtadagi zichligini belgilaylik: u nuqtaning koordinatalarini funksiyasi bo‘ladi va bu funksiyani har doim uzluksiz deb faraz qilamiz. $dm = \rho dV = \rho dxdydz$ massa elementlarini yig‘ib chiqamiz va barcha massa kattaliklar uchun

$$m = \iiint_{(V)} \rho dV = \iiint_{(V)} \rho dxdydz \qquad (1)$$

ega bo‘lamiz.

Elementar statistik momentlar uchun ushbu

$$dM_{yz} = xdm = x\rho dV,$$
$$dM_{zx} = ydm = y\rho dV,$$
$$dM_{xy} = zdm = z\rho dV,$$

munosabatlar o‘rinli bo‘lishini topamiz. Statistik momentlarni topish formulasi

$$M_{yz} = \iiint_{(V)} x\rho dV = \iiint_{(V)} x\rho dxdydz,$$
$$M_{zx} = \iiint_{(V)} y\rho dV = \iiint_{(V)} y\rho dxdydz, \qquad (2)$$
$$M_{xy} = \iiint_{(V)} z\rho dV = \iiint_{(V)} z\rho dxdydz,$$

iborat bo‘ladi.

Og‘irlik markazining koordinatalari uchun

$$\xi = \frac{\iiint_{(V)} x\rho dV}{m}, \quad \eta = \frac{\iiint_{(V)} y\rho dV}{m}, \quad \zeta = \frac{\iiint_{(V)} z\rho dV}{m} \qquad (3)$$

formulalar o‘rinli bo‘ladi.

Bir jinsli jism uchun $\rho = const$ bo‘ladi va og‘irlik markazining koordinatalari uchun

$$\xi = \frac{\rho \iiint_{(V)} xdV}{m}, \quad \eta = \frac{\rho \iiint_{(V)} ydV}{m}, \quad \zeta = \frac{\rho \iiint_{(V)} zdV}{m} \qquad (4)$$

munosabatlar o‘rinli bo‘ladi.

Koordinata o‘qlariga nisbatan inersiya momentlari uchun

$$I_x = \iiint_{(V)} \left(y^2 + z^2\right)\rho dV, \; I_y = \iiint_{(V)} \left(z^2 + x^2\right)\rho dV,$$
$$I_z = \iiint_{(V)} \left(x^2 + y^2\right)\rho dV, \qquad (5)$$

formulalar o‘rinli bo‘ladi.

Koordinata tekisliklariga nisbatan inersiya momentlari

$$I_{zy} = \int\limits_{(V)} x^2 \rho dV,\ I_{xz} = \int\limits_{(V)} y^2 \rho dV,\ I_{xy} = \int\limits_{(V)} z^2 \rho dV \tag{6}$$

formulalar bilan hisoblanadi.

$A(\xi,\eta,\zeta)$ nuqtada mahkamlangan (V) jism massa bilan tuldirilgan bo‘lsin. $dm = \rho dV$ massa elementi tomoni nisbatan tortishish kuchi koordinata o‘qlarida proeksiyaga ega bo‘ladi.

$$dF_x = \frac{x-\xi}{r^3}\rho dV,\ \ dF_y = \frac{y-\eta}{r^3}\rho dV,$$

$$dF_z = \frac{z-\zeta}{r^3}dV,$$

bu yerda $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$ A nuqtadan (x,y,z) nuqtagacha masofa elementi. Bundan to‘liq $\vec{F}$ tortishish kuchini koordinata o‘qlaridagi proeksiyasi uchun

$$F_x = \int\limits_{(V)} \frac{x-\xi}{r^3}\rho dV,\ \ F_y = \int\limits_{(V)} \frac{y-\eta}{r^3}\rho dV,$$

$$F_z = \int\limits_{(V)} \frac{z-\zeta}{r^3}\rho dV, \tag{7}$$

ega bo‘lamiz [2, 4].

Xuddi shunday (V) jismning nuqtadagi potensiali ham

$$W = \int\limits_{(V)} \frac{\rho dV}{r} \tag{8}$$

formula bilan hisoblanadi [3, 4].

Agar A nuqta jismdan tashqarida bo‘lsa, bu integrallarning barchasi xos integrallar bo‘ladi. Bu holda W integralni ixtiyoriy ξ,η,ζ o‘zgaruvchilar bo‘yicha integral ostida differensiallash mumkin. Natijada

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = F_x,\ \frac{\partial F}{\partial \eta} = F_y,\ \frac{\partial F}{\partial \zeta} = F_z, \tag{9}$$

hosil qilamiz.

Agar A nuqta (V) jismga tegishli bo‘lsa, bu nuqtada $r = 0$ va (7) va (8) dagi integral ostidagi funksiyalar chegaralanmagan bo‘lib qoladi. Keyinroq bu integrallarni xosmas ekanligini va mavjudligini (9) munosabatning bajarilishini ko‘rsatamiz.

Uch karrali integrallarning mexanikaga tadbiqlariga doir ba’zi bir misollar ko‘rib chiqaylik.

1 – misol. $\rho = 1$ bo‘lganda ikki o‘lchovli holda bir jinsli silindrik brusning statistik momenti uchun

$$M_{yz} = \int\limits_{(P)} zxdxdy,\ \ M_{zx} = \int\limits_{(P)} zydxdy,$$

$$M_{xy} = \int\limits_{(P)} z^2 dxdy$$

formulaga egamiz. Bularga (2) formulalarni qo‘llab:

$$M_{xy} = \iiint_{(V)} z\,dV = \iint_{(P)} dxdy \int_0^{z(x,y)} z\,dz;$$

bu yerda

$$\int_0^{z(x,y)} z\,dz = \frac{1}{2}z^2\Big|_{z=0}^{z=z(x,y)}.$$

2 – misol. $x^2+y^2=2az$ paraboloid va $x^2+y^2+z^2=3a^2$ sferik sirtlar bilan chegaralangan jismning og‘irlik markazini toping.

xy tekislikka nisbatan statistik momenti

$$M = \int_a^b xp(x)\,dx$$

formulada x ni z bilan almashtirib hisoblash mumkin. Ko‘ndalang kesim $R(z)$ ning yuzi $2az\pi$ ga teng. z^2 funksiya 0 dan a va $\pi\left(3a^2-z^2\right)$ funksiya uchun, yoki z o‘zgaruvchi a dan $a\sqrt{3}$ gacha o‘zgaradi. Shunday qilib,

$$M_{xy} = 2\pi a\int_0^a z^2dz + \pi\int_a^{a\sqrt{3}}\left(3a^2-z^2\right)dz = \frac{5}{3}\pi a^4.$$

Shuningdek jismning hajmi ma’lum: $V=\frac{\pi a^3}{3}\left(6\sqrt{3}-5\right)$, [6] bo‘lsa,

$$\frac{\iiint_{(V)} z\,dV}{V} = \zeta = \frac{5}{83}\left(6\sqrt{3}+5\right)a.$$

$\xi=\eta=0$ simmetrik jism bo‘lgani uchun.

3 – misol. $x^2+y^2+z^2$ $2az$ sferaning massasini toping va og‘irlik markazining o‘rnini aniqlang.

Agar sferaning nuqtalari zichligi bu nuqtalar bilan koordinata boshigacha bo‘lgan masofaga teskari proporsianal bo‘lsa,

$$\rho = \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

(1) formulaga ko‘ra massa

$$m = k\iiint_{x^2+y^2+z^2\ 2az} \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

teng.

Bu uch karrali integralda almashtirish bajarib, uni ushbu

$$m = k\int_0^{2a} dz \iint_{(R_z)} \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

sodda integral va ikki karrali integrallar orqali ifodalash mumkin. Bu yerda (R_z) radiusi $\sqrt{2az-z^2}$ ga teng bo‘lgan aylana. Ichki integralni qutb koordinatalarga o‘tib

$$\int_0^{2a\sqrt{2az-z^2}}\int_0^{} \frac{rdrd\theta}{\sqrt{r^2+z^2}} = 2\pi\left(\sqrt{2az}-z\right)$$

tengligini topamiz.

Bundan esa $m=\frac{4}{3}\pi Ra^2$ bo‘lishini topamiz.

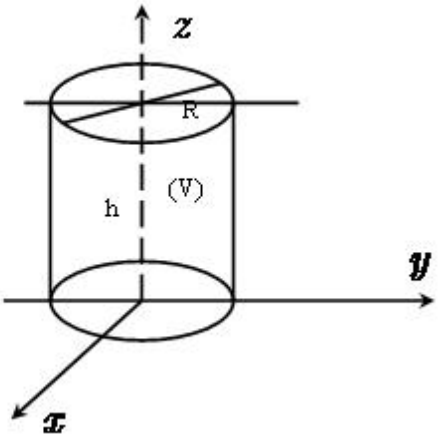
Statistik momenti esa (2) munosabatlardan foydalanib

$$M_{xy} = R\int_{x^2+y^2+z^2}\int_{2az} \frac{zdxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{16}{15}\pi Ra^2$$

tengligini topamiz.

Og‘irlik markazi esa, $\xi=\frac{4}{3}a$ ga teng, qolgan ikki koordinatasi 0 ga teng.

4 – misol. Ushbu silindrning asosidagi tortishish markazini toping. Rasmda ifodalanishiga ko‘ra



$$F_z = \int_{(V)}\int \frac{\rho z dV}{V^3} = \int_{x^2+y^2}\int_{R^2} dxdy \int_0^h \frac{\rho z dz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} =$$

$$\int_{x^2+y^2}\int_{R^2} \rho\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+h^2}}\right)dxdy = = 2\pi\rho\left(R+h-\sqrt{R^2+h^2}\right).$$

Qolgan ikkita tortishish kuchi nolga teng. Shuning uchun tortishish vertikal yuqoriga yo‘nalgan.

5 – misol. Silindrning asosini markazidagi potensialini toping.

(8) formuladan foydalanib topamiz. Buning uchun

$$W = \int_0^h \rho dz \int_{x^2+y^2}\int_{R^2} \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}:$$

Ikki karrali integralni qutb koordinatalarga o‘tib hisoblaymiz. Natijada

$$W = 2\pi\rho \int_0^h \left(\sqrt{R^2+z^2} - z\right) dz = \rho\pi R^2 \ln\frac{h+\sqrt{R^2+h^2}}{R} + \rho\pi h\left(\sqrt{R^2+h^2} - h\right)$$

ega bo‘lamiz.

Agar jismning inersiya momenti koordinata boshidan chiqib turli o‘qlarga tarqalgan bo‘lsa, har bir o‘qda

$$ON = \frac{1}{\sqrt{I_n}}$$

kesmalar ajratadi.

$$X = ON\cos\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{I_n}},\ \ Y = \frac{\cos\beta}{\sqrt{I_n}},\ \ Z = \frac{\cos\gamma}{\sqrt{I_n}}$$

lar bu kesmaning oxiri N nuqtaning koordinatalari bo‘lsin. U holda I_n ning qiymati ma’lumligiga ko‘ra N nuqtaning geometrik o‘rnini aniqlaydigan

$$I_x X^2 + I_y Y^2 + I_z Z^2 - 2K_{yz}YZ - 2K_{zx}ZX - 2K_{xy}XY = 1$$

tenglamani hosil qilamiz [7, 8].

Shuningdek ON kesmaning uzunligi cheksizlikka aylanmasa, bu ikkinchi tartibli sirt ellipsoid bo‘ladi. U ellipsoid inersiya deyiladi. Qattiq jismlarning harakatini tekshirayotganimizda ellipsoid inersiyaning o‘qlari asosiy rol uynaydi. Shuning uchun bu o‘qlar inersiyaning bosh o‘qlari deyiladi. Agar O nuqta og‘irlik markazi bo‘lsa, mos inersiya o‘qlari inersiyaning bosh markaziy o‘qi deyiladi.

Koordinata o‘qlarining inersiyani bosh o‘qlari bo‘lishiga markazdan qochuvchi momentga bog‘liq. Masalan, x o‘qi inersiya bosh o‘qi bo‘lishi uchun

$$K_{xy} = 0,\ \ K_{zx} = 0$$

shartning bajarilishi zarur va yetarli.

Xususan, bu shartlar bajarilishi uchun massa yz tekisligiga simmetrik tarqalgan bo‘lishi kerak.

Qattiq jismni o‘q atrofida aylanishida markazdan qochuvchi kuch haqida to‘xtalib o‘tamiz.

Agar (V) jism z o‘qi atrofida ω burchak tezlik bilan aylangan bo‘lsa, $dm = \rho dV$ elementli jismning markazdan qochuvchi kuchi

$$DF = \omega^2 r dm = \omega^2 r\rho dV$$

kattalik bilan hisoblanadi. Bu erda r aylanish o‘qidan elementgacha bo‘lgan masofa. Masofadan qochuvchi kuchning koordinata o‘qlaridagi proeksiyasi

$$dF_x = \omega^2 x\rho dV,\ \ dF_y = \omega^2 y\rho dV,\ \ dF_z = 0$$

ga teng. $\vec{F}$ markazdan qochuvchi kuch ushbu integrallar orqali

$$F_x = \omega^2 \int_{(V)} x\rho dV = \omega^2 M_{yz},\ \ F_y = \omega^2 M_{zx},\ \ F_z = 0$$

hisoblanadi. Bu erda $M_{yz}, M_{zx}-$ jismning statistik momenti. Agar ξ, η, ζ lar orqali jismning og‘irlik markazining koordinatalarini ifodalasak, bu formulalar

$$F_x = \omega^2 \xi m,\ F_y = \omega^2 \eta m,\ F_z = 0$$

ko‘rinishda yoziladi.

Markazdan qochuvchi elementar kuch orqali koordinata o‘qlariga nisbatan momentlarini

$$dM_x = zdF_y = \omega^2 yz\rho dV,$$

$$dM_y = zdF_x = \omega^2 zx\rho dV, \quad dM_z = 0$$

ko‘rinishda ifodalash mumkin [6, 7].

Natijada bu o‘qlarga nisbatan momentlar

$$M_x = \omega \int\limits_{(V)} yz\rho dV = \omega^2 K_{yz}, \quad M_y = K_{zx}, \quad M_z = 0$$

integrallar orqali topiladi.

Markazdan qochuvchi kuch uzaro teng kuchli bo‘lishi uchun yoki valga tashqi ta’sir ko‘rsatmasligi uchun

$$M_{yz} = 0, \quad M_{zx} = 0, \quad K_{yz} = 0, \quad K_{zx} = 0$$

shartlar urinli bo‘lishi zarur va etarli. Birinchi ikkitasi jismning og‘irlik markazini z o‘qida yotishini ifodalaydi, keyingi ikkitasi esa z o‘qini inersiyasining bosh o‘qi ekanligini ko‘rsatadi.

Uch karrali integralning mexanikada tadbiqlarini ba’zi bir aniq misollar yordamida ko‘rib chiqamiz [6, 7].

6 – misol. Bir jinsli $(\rho = 1)$ ellipsoidning

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \quad 1 \quad (a > b > c)$$

potensialini toping.

Sferik koordinatalarni kiritamiz, bu holda x o‘q sifatida qutb o‘qni olamiz:

$$x - r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi\cos\theta, \quad z = r\sin\varphi\sin\theta.$$

U holda

$$W = \int\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\ 1} \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 8 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_0^{\sqrt{\left(\frac{\cos\varphi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sin\varphi\cos\theta}{b}\right)^2 + \left(\frac{\sin\varphi\sin\theta}{c}\right)^2}} rdr =$$

$$= 4 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{B\cos^2\theta + C\sin^2\theta}.$$

bu yerda $B = \dfrac{\cos^2\varphi}{a^2} + \dfrac{\sin^2\varphi}{b^2}, \quad C = \dfrac{\cos^2\varphi}{a^2} + \dfrac{\sin^2\varphi}{c^2}.$

Ichki integral $\dfrac{\pi}{2\sqrt{BC}}$ ga teng. Keyin $\dfrac{\sqrt{a^2-c^2}}{a}\cos\varphi = t$ deb, birinchi tur elliptik integralni hosil qilamiz:

$$W = \frac{2\pi abc}{\sqrt{a^2 - c^2}} \int\limits_0^{\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a}} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)\left(1 - \dfrac{a^2-b^2}{a^2-c^2}t^2\right)}}.$$

$t = \sin\lambda$ urniga qo‘yish orqali Lejandr formasiga kelamiz:

$$W = \frac{2\pi abc}{\sqrt{a^2-c^2}} \int_0^{\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a}} \frac{dt}{\sqrt{1-k_0^2\sin^2\lambda}} = \frac{2\pi abc}{\sqrt{a^2-c^2}} F\left(\lambda_0, k_0\right),$$

bu yerda $\lambda_0 = \arcsin\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a}$, $k_0 = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}$.

XULOSA

Ma’lumki, matematik analiz kursidagi ahamiyat molik, hisoblash murakkab bo‘lgan va matematikaning boshqa sohalari rivojida muhim sanalgan bir qator geometric va fizik kattaliklarning qiymatlarini karrali integral xossalari va metodlaridan foydalangan holda hisoblash va oson hisoblashga qulaylik tug‘diradigan yo‘llarini topish masalasining o‘rganilishi matematik analiz fani va uning tatbiqlari nazariyasining zamonaviy kontseptsiyalarini osonroq tushunishga yordam beradi va shuningdek, matematik analizning tatbiqlari bobining rivojlanishiga asos bo‘ladi hamda haqiqiy analizning ba’zi masalalarini hal qilish usullarini yanada ko‘paytiradi.

Shuningdek, ba’zi integrallarni yaqinlashishga tekshirish va ularning qiymatlarini hisoblash, karrali integrallarning xossalari va metodlaridan foydalanish usullarini o‘rganish va ulardan foydalanish yo‘llarini topish o‘rganuvchilarni matematikaga bo‘lgan qiziqishlarini orttiradi. Matematik analiz va uning tatbiqlarining o‘quv materialini chuqurroq va kengroq o‘rganish imkoniyatini yaratadi.

ADABIYOTLAR RO‘YXATI

1. Г.Фихтенгольц. «Курс дифференциального и интегрального исчисления», Том I, II, III. Москва, «Физматлит», 2001.
2. Xudoyberganov G., Vorisov A.K., Mansurov X.T., Shoimqulov B.A. Matematik analizdan ma’ruzalar. T. 1,2-qismlar. 2010.
3. Sh.O.Alimov, R.R.Ashurov. Matematik analiz 1,2,3 q. T. «Mumtoz so‘z», 2018.
4. Tao T. Analysis 1, 2. Hindustan Book Agency, India, 2014.
5. .Архипов, В.Садовничий, В.Чубариков. «Лекции по математическому анализу», Москва, «Высшая школа»–1999.
6. A.Sa’dullaev, H.Mansurov, G.Xudoyberganov, A.Vorisov, R.G‘ulomov «Matematik analiz kursidan misol va masalalar to‘plami», 1-, 2- tom, Toshkent, «O‘zbekiston» – 1993, 1996.
7. Б.П. Демидович, «Сборник задач и упражнений по математическому анализу», Изд. 13-е, Москва, «ЧеРо», 1997.
8. Zhamuratov, K., Umarov, K., & Dodobayev, A. (2024, May). Drainage of a semi-infinite aquifer in the presence of evaporation. In AIP Conference Proceedings (Vol. 3147, No. 1). AIP Publishing.
9. Жамуратов, К., Умаров, Х. Р., & Турдимуродов, Э. М. (2024). О решении методом регуляризации одной системы функциональных уравнений с дифференциальным оператором (Doctoral dissertation, Белорусско-Российский университет) (Doctoral dissertation, Doctoral dissertation, Белорусско-Российский университет).
10. Агафонов, А., Умаров, Х., & Душабаев, О. (2023). ДРЕНИРОВАНИЕ ПОЛУ БЕСКОНЕЧНОГО ВОДОНОСНОГО ГОРИЗОНТА ПРИ НАЛИЧИИ ИСПАРЕНИЯ. Евразийский журнал технологий и инноваций, 1(6 Part 2), 99-104.

11. Narjigitov, X., Jamuratov, K., Umarov, X., & Xudayqulov, R. (2023). SEARCH PROBLEM ON GRAPHS IN THE PRESENCE OF LIMITED INFORMATION ABOUT THE SEARCH POINT. Modern Science and Research, 2(5), 1166-1170.
12. Умаров, Х. Р., & Жамуратов, К. (2015). Решение задачи о притоке к математическому совершенному горизонтальному дренажу. Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика, 3(8-4), 303-307.
13. ЖАМУРАТОВ, К., УМАРОВ, Х.Р., & АЛИМБЕКОВ, А. Решение одной задачи движения грунтовых вод в области с подвижной границей при наличии испарения. НАУЧНЫЙ АЛЬМАНАХ Учредители: ООО" Консалтинговая компания Юком, 81-84.
14. Жамуратов, К., Умаров, Х., & Холбоев, С. (2016). Решение одной задачи теории фильтрации методом квазистационарного приближения. Вестник ГулГУ, (2016/2), 9.
15. Umarov, X. R., & Asqarbekova, D. J. (2025). YIG‘INDI VA KO‘PAYTMALARNI HISOBLASHDA KOMPLEKS ANALIZ METODLARIDAN FOYDALANISH. МОЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ КАРЬЕРА. Международная научно-образовательная электронная библиотека (НЭБ) «МОЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ КАРЬЕРА», (68 (том 2)).
16. Умаров, Х. (2024). БИОЛОГИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА. Педагогика и психология в современном мире: теоретические и практические исследования, 4 (11 (Special Issue), 274–277. извлечено от https://inlibrary.uz/index.php/zdpp/article/view/58336
17. Umarov, H. ., & Shodmonkulova, S. (2024). APPLICATION OF THE L’HФPITAL’S RULE. Modern Science and Research, 3(2), 380–388. Retrieved from https://inlibrary.uz/index.php/science-research/article/view/31003.
18. К Жамуратов, Х Умаров, С Холбоев Решение одной задачи теории фильтрации методом квазистационарного приближения. - Вестник ГулГУ,(2016/2), 2016.
19. X.R.Umarov, & D.I. Boymurodov. (2025). GAMMA FUNKSIYANING AYRIM XOSSALARI. Международная научно-образовательная электронная библиотека (НЭБ) «МОЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ КАРЬЕРА», 70 (том 1). https://mpcareer-google.ru/index.php/mpc/article/view/1386
20. Умаров, Х.Р. Решение задачи о притоке к математическому совершенному горизонтальному дренажу / Х.Р.Умаров, К.Жамуратов // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. – 2015. – № 3 (8-4). – С. 303–307.
21. К. Жамуратов, Х. Умаров, & М. Бойкузиева. (2025). К ПОСТРОЕНИЮ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ДВИЖЕНИЯ ГРУНТОВЫХ ВОД ВБЛИЗИ НОВЫХ ВОДОХРАНИЛИЩ И КАНАЛОВ. Международная научно-образовательная электронная библиотека (НЭБ) «МОЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ КАРЬЕРА», 70 (том 1). https://mpcareer-google.ru/index.php/mpc/article/view/1387
22. X.R.Umarov, & D.I. Boymurodov. (2025). GAMMA FUNKSIYANING AYRIM XOSSALARI. Международная научно-образовательная электронная библиотека (НЭБ) «МОЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ КАРЬЕРА», 70 (том 1). https://mpcareer-google.ru/index.php/mpc/article/view/1386
23. Х.Р. Умаров, & Д.Ж. Асқарбекова. (2025). НАТУРАЛ СОНЛАР ҚАТОРИ ДАРАЖАЛАРИ ЙИҒИНДИСИНИ ТОПИШНИНГ БИР УСУЛИ. МОЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ КАРЬЕРА. Международная научно-образовательная электронная библиотека (НЭБ) «МОЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ КАРЬЕРА», 68 (том 2). https://mpcareer-google.ru/index.php/mpc/article/view/926