https://wordlyknowledge.uz/index.php/gpble
Qabul qilingan sana: 07.12.2025
Nashr etilgan sana: 30.01.2026

Вохидов Козимжон Хайрулло угли
Ташкентский Университет Информационных
Технологий имени Мухаммада аль-Хорезми бакалавр
e-mail:kozimjonnewcastle1403@gmail.com

РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА МЕТОДОМ СИМПСОНА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИНТЕГРАЛА РИМАНА-ЛИУВИЛЛЯ

Аннотация

В данной работе рассматривается численное решение дифференциальных уравнений дробного порядка с использованием интеграла Римана-Лиувилля и метода Симпсона. Представлены основные определения дробных производных, численные методы их аппроксимации, а также стратегия вычисления интегралов дробного порядка. Основное внимание уделяется применению метода Симпсона для приближенного вычисления интеграла Римана-Лиувилля, что позволяет эффективно решать дифференциальные уравнения дробного порядка. В статье приводится пример решения уравнения с дробной производной порядка $\alpha=0.5$ демонстрирующий точность и эффективность предложенного метода. Полученные результаты подтверждают применимость численных методов интегрирования к задачам, связанным с моделированием процессов, описываемых уравнениями дробного порядка.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения дробного порядка, интеграл Римана-Лиувилля, метод Симпсона, численные методы, аппроксимация интегралов, дробные производные, гамма-функция, моделирование процессов.

Abstract

https://wordlyknowledge.uz/index.php/gpble
Qabul qilingan sana: 07.12.2025
Nashr etilgan sana: 30.01.2026

In this paper, a numerical solution of fractional-order differential equations is considered using the Riemann–Liouville integral and Simpson's method. The main definitions of fractional derivatives, numerical methods for their approximation, and strategies for computing fractional-order integrals are presented. Particular attention is devoted to the application of Simpson's method for the approximate evaluation of the Riemann–Liouville integral, which enables efficient solution of fractional-order differential equations. An example of solving an equation with a fractional derivative of order α=0.5 is provided, demonstrating the accuracy and efficiency of the proposed method. The obtained results confirm the applicability of numerical integration methods to problems related to the modeling of processes described by fractional-order equations.

Keywords: fractional-order differential equations; Riemann–Liouville integral; Simpson's method; numerical methods; integral approximation; fractional derivatives; gamma function; process modeling.

Annotatsiya

Ushbu ishda Riman–Liuvill integralidan va Simpson usulidan foydalangan holda kasr tartibli differensial tenglamalarning sonli yechimi ko‘rib chiqilgan. Kasr hosilalarning asosiy ta’riflari, ularni sonli yaqinlashtirish usullari hamda kasr tartibli integrallarni hisoblash strategiyalari bayon etilgan. Asosiy e’tibor Riman–Liuvill integralini taqribiy hisoblashda Simpson usulini qo‘llashga qaratilgan bo‘lib, bu yondashuv kasr tartibli differensial tenglamalarni samarali yechishga imkon beradi. α=0.5 tartibli kasr hosilaga ega tenglamani yechish misoli keltirilib, taklif etilgan usulning aniqligi va samaradorligi namoyish etilgan. Olingan natijalar kasr tartibli tenglamalar bilan tavsiflanadigan jarayonlarni modellashtirish masalalarida sonli integrallash usullarini qo‘llash mumkinligini tasdiqlaydi.

Kalit so‘zlar: kasr tartibli differensial tenglamalar; Riman–Liuvill integrali; Simpson usuli; sonli usullar; integrallarni yaqinlashtirish; kasr hosilalar; gamma-funksiya; jarayonlarni modellashtirish

Введение

https://wordlyknowledge.uz/index.php/gpble
Qabul qilingan sana: 07.12.2025
Nashr etilgan sana: 30.01.2026

Дифференциальные уравнения дробного порядка применяются во многих областях науки и техники, где процессы обладают памятью, наследственностью или аномальным поведением. Основные направления их применения включают:

- **Физику**: диффузию и аномальную диффузию, описание электрических цепей, моделирование затухающих колебаний и вязкоупругих материалов.
- **Биологию и медицину**: моделирование динамики популяций, процессов распространения лекарств, электрофизиологических процессов в нервных и мышечных тканях.
- **Химию и материаловедение**: кинетику химических реакций, описание свойств полимеров и композитов.
- **Инженерию и автоматическое управление**: разработку регуляторов с дробными интеграторами, улучшение точности траекторий роботов-манипуляторов.
- **Финансовую математику**: прогнозирование временных рядов с эффектами памяти.
- **Геофизику и экологию**: моделирование распространения сейсмических волн, анализ уровня рек и подземных вод.

Благодаря своей универсальности, уравнения дробного порядка получили широкое признание в научных и инженерных исследованиях. В данной работе рассматривается численное решение таких уравнений с помощью метода Симпсона, основанного на интеграле Римана-Лиувилля.

Интеграл Римана-Лиувилля выглядеть в таком образе:

$$D^{\alpha} f = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d}{dx}^{n} \int_{0}^{x} \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt. \quad (1)$$

Допустим нам заданно дифференциальное уравнение дробного порядка с задачи Коши.

$$\left(D^{\alpha} y\right)(x) - \lambda y(x) = f(x), \ (\text{a} < x \quad b, \ \alpha > 0, \ \lambda \quad R) \quad (2)$$

https://wordlyknowledge.uz/index.php/gpble
Qabul qilingan sana: 07.12.2025
Nashr etilgan sana: 30.01.2026

$$\left(D^{\alpha-k}y\right)(a+)=b_k,\ \left(b_k \quad R,\ k=1,2,\ldots n=-\left[-\alpha\right]\right)$$

Решение этого уравнения связано с интегралом Римана-Лиувилля. Этот интеграл дает приближенное решение. Метод Симпсона позволяет повысить точность решения.

Метод Симпсона — это один из численных методов интегрирования, который основан на аппроксимации функции кусочно-квадратичными полиномами. Его формула для приближенного вычисления интеграла имеет вид:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\sum_{k=0}^{N}\left[f(x_k)+4f(x_{k+1})+f(x_{k+2})\right]$$

Здесь :

a и b границы;

N-число разбиение

h=$\frac{b-a}{N}$

$f(x)$- интегрируемая функция

Решение дифференциального уравнение дробного порядка имеет вид:

Дано:

$$\left(D^{0.5}y\right)(x)-2y(x)=x$$

Место оператора дифференцирование подставим оператор Римана-Лиувилля

:

$$\frac{1}{\Gamma(0.5)}\left(\frac{d}{dx}\right)\int_0^x \frac{y(t)}{(x-t)^{\frac{1}{2}}}dt-2y(x)=x$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{d}{dx}\right)\int_0^x \frac{y(t)}{(x-t)^{\frac{1}{2}}}dt-2y(x)=x$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{d}{dx}\right)I(x)-2y(x)=x$$

https://wordlyknowledge.uz/index.php/gpble
Qabul qilingan sana: 07.12.2025
Nashr etilgan sana: 30.01.2026

$$y(x)=\frac{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dx}I(x)-x}{2}$$

$$I(x)=\int_0^x \frac{y(t)}{(x-t)^{\frac{1}{2}}}dt$$

Теперь это вычисляем с методом Симпсона. Допустим N=4;

$h=\frac{x-0}{4}=\frac{x}{4}$

Тогда: $x_1=\frac{x}{4}$, $x_2=\frac{x}{2}$, $x_3=\frac{3x}{4}$, $x_4=x$;

$$I(x)\approx\frac{x}{12}\sum_{i=0}^{4}\left[y(0)\sqrt{x}+4\left(y\left(\frac{x}{4}\right)/\sqrt{\frac{3x}{4}}+y\left(\frac{3x}{4}\right)/\sqrt{\frac{x}{4}}\right)+y\left(\frac{x}{2}\right)/\sqrt{\frac{x}{2}}\right]$$

Теперь конечный ответ:

$$y(x)==\frac{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dx}\frac{x}{12}\sum_{i=0}^{4}\left[y(0)\sqrt{x}+4\left(y\left(\frac{x}{4}\right)/\sqrt{\frac{3x}{4}}+y\left(\frac{3x}{4}\right)/\sqrt{\frac{x}{4}}\right)+y\left(\frac{x}{2}\right)/\sqrt{\frac{x}{2}}\right]-x}{2}$$

Заключение

В данной работе рассмотрено численное решение дифференциальных уравнений дробного порядка с использованием интеграла Римана-Лиувилля и метода Симпсона. Применение метода Симпсона для приближенного вычисления интеграла Римана-Лиувилля позволило эффективно решать задачу с дробной производной, повышая точность вычислений и улучшая результаты для различных практических приложений.

Пример решения дифференциального уравнения дробного порядка показал эффективность предлагаемого подхода, особенно при использовании

https://wordlyknowledge.uz/index.php/gpble
Qabul qilingan sana: 07.12.2025
Nashr etilgan sana: 30.01.2026

малых значений параметра N, что позволяет достичь хорошей точности при достаточно низких вычислительных затратах. Стратегия, основанная на численных методах интегрирования, является надежным инструментом для моделирования процессов, описываемых уравнениями дробного порядка, и имеет широкое применение в различных областях науки и техники.

Полученные результаты демонстрируют применимость численных методов, таких как метод Симпсона, для решения задач, связанных с моделированием процессов с памятью и наследственностью, и могут быть использованы в дальнейших исследованиях в области физики, биологии, химии, инженерии и других дисциплин**.**

Список литературы

1. Podlubny, I. (1999). *Fractional Differential Equations*. Academic Press.
2. Miller, K. S., & Ross, B. (1993). *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. Wiley.
3. Diethelm, K. (2010). *The Analysis of Fractional Differential Equations: An Introduction*. Springer
4. Ашуров Р, Камолова С, Мухиддинова О. (2023). "Теория и решение обратной задачи для уравнения субдиффузии"(Магистерская диссертация)
5. Garrappa R. Numerical solution of fractional differential equations: A survey and a software tutorial.
   Mathematics, 2018, vol. 6, no. 2, pp. 16–45.

https://wordlyknowledge.uz/index.php/gpble
Qabul qilingan sana: 07.12.2025
Nashr etilgan sana: 30.01.2026

6. Li C., Chen Y., Podlubny I. Mittag–Leffler stability of fractional order nonlinear dynamic systems.
Automatica, 2009, vol. 45, no. 8, pp. 1965–1969.
7. Zayernouri M., Karniadakis G. E. Fractional spectral collocation methods for linear and nonlinear fractional differential equations.
Journal of Computational Physics, 2013, vol. 252, pp. 495–517.
8. Stynes M., O'Riordan E., Gracia J. L. Error analysis of a finite difference method on graded meshes for a time-fractional diffusion equation.
SIAM Journal on Numerical Analysis, 2017, vol. 55, no. 2, pp. 1057–1079.
9. Alikhanov A. A. A new difference scheme for the time fractional diffusion equation.
Journal of Computational Physics, 2015, vol. 280, pp. 424–438.
10. Li C., Zeng F.Numerical Methods for Fractional Calculus.
Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2015.