TEXNIKAVIY MASALALARNI YECHISHDA ANIQ INTEGRALNI QO‘LLASH

Qaxxarov Akmal Abdug‘ufurovich,

Kenjayev Sharof Shermuxamatovich,

Abduraxmonov Abror Akromovich

Shahrisabz “Temurbeklar maktabi” harbiy-akademik litseyi matematika fani o‘qituvchilari

Annotatsiya: Maqolada matematika fanidagi moddiy nuqtaning statik momenti va og‘irlik markazi, tekis egri chiziqning statik momenti va og‘irlik markazi, tekis figuralarning statik momenti va og‘irlik markazi, kuch ishini hisoblash, ularni talabalar tomonidan fanni o‘rganishdagi o‘rni, yangi bilimlarni o‘zlashtirish va amaliyotga qo‘llashdagi ahamiyati haqida so‘z boradi.

Kalit so‘zalar: Moddiy nuqtaning statik momenti, moddiy nuqtaning o‘g‘irlik markazi, tekis egri chiziqning statik momenti, tekis egri chiziqning o‘g‘irlik markazi.

Moddiy nuqtaning statik momenti va og‘irlik markazi. XOY koordinatalar tekisligida quyidagi moddiy nuqtalar sistemasi berilgan bo‘lsin:

$$A_1(x_1; y_1), A_2(x_2; y_2), \dots, A_n(x_n; y_n) \qquad (1)$$

Bu nuqtalarning massalari mos ravishda

$$m_1, m_2, \dots, m_n \qquad (2)$$

dan iborat bo‘lsin. U holda, moddiy nuqtalarning OX o‘qqa nisbatan statik momenti (M_x) quyidagidan iborat bo‘ladi:

$$M_x = m_1y_1 + m_2y_2 + \dots + m_ny_n \qquad (3)$$

yoki

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} m_iy_i = my_c \qquad (3')$$

OY o‘qqa nisbatan statik momenti esa

$$M_y = m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_nx_n \qquad (4)$$

yoki

$$M_y = \sum_{i=1}^{n} m_ix_i = mx_c \qquad (4')$$

$m = m_1 + m_2 + \dots m_n$ bo‘lganda $(x_c;\ y_c) = \left(\frac{M_y}{m};\ \frac{M_x}{m}\right)$ koordinatali nuqtaga moddiy nuqtalar sistemasining *og‘irlik markazi* deyiladi.

Og‘irlik markazining koordinatalari $(3')$ va $(4')$ larga asosan quyidagi formulalar orqali topiladi:

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \quad (5)$$

$$y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \quad (6)$$

Tekis egri chiziqning statik momenti va og‘irlik markazi. $[a; b]$ oraliqda uzluksiz hosilaga ega bo‘lgan AB egri chiziqli $f(x)$ funksiya berilgan bo‘lib, u L uzunlikka ega bo‘lsin. Bunda AB egri chiziqni bir jinsli, ya’ni chiziqli zichligi ρ o‘zgarmas, soddalik uchun $\rho = 1$ deb qaraymiz.

AB egri chiziqning OX va OY o‘qlarga nisbatan statik momentlarini hamda egri chiziqning og‘irlik markazini topamiz. Buning uchun AB egri chiziqni $A = A_0(x_0;\ y_0), A_1(x_1;\ y_1), \ldots, A_n(x_n;\ y_n) = B$ nuqtalar orqali n ta bo‘lakka ajratamiz. Bu nuqtalarga l parametrning

$$l_0 = 0 < l_1 < l_2 < \ldots < l_n = L$$

qiymatlari mos kelsin. l parametr A nuqtadan boshlangan yoydan iborat. A_iA_{i+1} yoyning uzunligini

$$\Delta l_i = l_{i+1} - l_i,$$

shu yoyning massasini esa Δm_i bilan belgilaymiz. U holda, $\rho = 1$ bo‘lganda massa quyidagicha bo‘ladi:

$$\Delta m_i = \rho \cdot \Delta l_i = \Delta l_i.$$

Qism yoyning uzunligini moddiy nuqta deb qarasak, u holda, uning og‘irlik markazi unga mos keladigan qism yoy uzunligiga teng bo‘ladi, ya’ni $\Delta m_i = \Delta l_i$. Moddiy nuqtaning OX o‘qdan y_i, OY o‘qdan esa x_i masofalarda yotganligini e’tiborga olsak, quyidagi tenglamalar o‘rinli bo‘ladi:

$$\begin{cases} \Delta M x_i = y_i \Delta m_i = y_i \cdot \Delta l_i \\ \Delta M y_i = x_i \Delta m_i = x_i \cdot \Delta l_i \end{cases}$$ va

$\Delta l_i \approx \sqrt{1 + \left(f'(x_i)\right)^2} \cdot x_i$ bo‘lganligi sababli,

$$\begin{cases} \Delta M x_i \approx f'(x_i)\sqrt{1 + \left(f'(x_i)\right)^2} \cdot \Delta x_i \\ \Delta M y_i \approx x_i\sqrt{1 + \left(f'(x_i)\right)^2} \cdot \Delta x_i \end{cases}$$ va

U holda, AB egri chiziq bo‘laklari yig‘indisining $\lambda = \max_{1\le i\le n}\{\Delta l_i\} \to 0$ dagi limitlari quyidagilardan iborat bo‘ladi:

$$M_x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta l_i = \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx, \tag{7}$$

$$M_y = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} x_i\cdot\Delta l_i = \int_a^b x\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx, \tag{8}$$

$$m = l = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx. \tag{9}$$

(5)-(9) formulalardan foydalanib, tekis egri chiziq og‘irlik markazining formulalarini hosil qilamiz:

$$x_c = \frac{\int_a^b x\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}, \tag{10}$$

$$y_c = \frac{\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}. \tag{11}$$

Agar $f(x)$ ni $y = f(x)$ va $L = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$ ekanligini e’tiborga olsak, (10) va (11) ni soddalik uchun quyidagi ko‘rinishlarda yozish ham mumkin:

$$x_c = \frac{\int_a^b x\sqrt{1+(y')^2}\,dx}{L}, \tag{12}$$

$$y_c = \frac{\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx}{L}. \tag{13}$$

(13) formuladan:

$$L\cdot y_c = \int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx \tag{14}$$

hosil bo‘ladi. (14) ning ikkala tomonini 2π ga ko‘paytirib, quyidagi formulaga ega bo‘lamiz:

$$2\pi y_c \cdot L = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx, \tag{15}$$

(15)ning chap tomoni y_c radiusli aylana uzunligini, o‘ng tomoni esa AB yassi egri chiziqning OX o‘qi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan sirt yuzasini ifodalaydi, ya’ni $2\pi y_c l = S$.

Demak, $L = \int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx$ *yoy uzunligining*, $S = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx$ esa *aylanma jism sirtining yuzini* topish formulasidir.

Tekis egri chiziqni shu chiziq bilan kesishmaydigan biror o‘q atrofida aylantirishdan hosil qilingan sirtning yuzi bu chiziq uzunligini C og‘irlik markazi tomonidan chizilgan aylana uzunligiga ko‘paytirilganiga tengdir.

Tekis figuralarning statik momenti va og‘irlik markazi. $[a, b]$ oraliqda $x = a$ va $x = b$ to‘g‘ri chizig‘lar hamda OX o‘q bilan chegaralangan, manfiymas egri chiziqli trapetsiya $y = f(x)$ funksiya orqali berilgan. Egri chiziq massasi $\rho = 1$ zichlikda uzluksiz taqsimlangan bo‘lsin. U holda, egri chiziqli trapetsiyaning massasi uning yuzasini son qiymatiga teng. Egri chiziqli trapetsiyaning statik momentlari M_x va M_y ni topish uchun uni $x_i = a + \frac{b-a}{n} i$ ($i = 0,1,2,\ldots,n$) nuqtadan o‘tuvchi va ordinata o‘qiga parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziqlar yordamida n ta bo‘lakka ajratamiz. Ajratilgan n bo‘laklardan birining massasi

$$\Delta S_i \approx y_i \cdot \Delta x_i$$

dan iborat. Bo‘lakning og‘irlik markazi $\left(x_i, \frac{y_i}{2}\right)$ ni hisobga olib, quyidagilarni hosil qilamiz:

$$\Delta M_{xi} = y_i \Delta x_i \cdot \frac{y_i}{2} = \frac{y_i^2}{2}\Delta x_i, \qquad \Delta M_{y_i} = y_i \Delta x_i \cdot x_i = x_i y_i \cdot \Delta x_i.$$

Ularning barchasining yig‘indisini $\lambda = \max_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\} \to 0$ dagi limitini topamiz:

$$M_x = \frac{1}{2}\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} y^2 \Delta x_i = \frac{1}{2}\int_a^b y^2 dx, \tag{16}$$

$$M_y = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} x \cdot y \Delta x_i = \int_a^b xy\,dx \tag{17}$$

,

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} y \cdot \Delta x_i = \int_a^b y dx = S. \tag{18}$$

(18) formula berilgan egri chiziqli trapetsiyaning massasidan iborat.

(10) va (11) yoki (12) va (13) dan og‘irlik markazining koordinatalarini aniqlaymiz:

$$x_C = \frac{M_y}{m} = \frac{\int_a^b xydx}{\int_a^b ydx} \tag{19}$$

$$y_C = \frac{M_x}{m} = \frac{\int_a^b y^2 ydx}{\int_a^b ydx} \tag{20}$$

(20) tenglamaning ikkala tomonini $2\pi m$ ga ko‘paytiramiz:

$$2\pi y_c \cdot m = \pi \int_a^b y^2 dx. \tag{21}$$

Hosil bo‘lgan tenglamaning o‘ng tomoni aylanish jismining hajmi formulasidir. Agar $m = S$ ekanligini e’tiborga olsak, (21) ni quyidagicha ifodalash mumkin bo‘ladi:

$$V = S \cdot 2\pi y_c. \tag{22}$$

Tekis figurani u bilan kesishmagan o‘q atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan jismning hajmi-shu figura yuzining shu shakl og‘irlik markazi chizgan aylana uzunligi bilan ko‘paytimasiga teng.

Kuch ishini hisoblash. O‘zgarmas F kuch OX o‘qi bo‘ylab yo‘naltirilgan hamda uning P nuqtasi OX o‘qi bo‘ylab $[a, b]$ kesmada joylashgan bo‘lsin. U holda, shu kesmada kuchning bajargan ishi

$$A = F|ab| \tag{23}$$

formula yordamida hisoblanadi. Agar F kuch o‘zining kattaligini o‘zgartirsa, kuch ishini (23) formula yordamida hisoblashning imkoni bo‘lmay qoladi. Shuningdek, kuch bajargan ishni hisoblashda ko‘pincha quyidagi *Guk qonunidan* foydalaniladi:

$$F = kx, \tag{24}$$

bunda F -kuch, x - prujinaning F kuch ta’sirida absolyut uzayishi, k -proportsionallik koeffitsiyenti.

$F(x)$ kuchning $[a; b]$ kesmada bajargan ishi aniq integraldan iborat:

$$A = \int_a^b F(x)dx. \tag{25}$$

Foydalanilgan adabiyotlar

1. J.S. Sultonov, A.J. Sultonov Oliy matematika nazariy va amaliy mashg`ulotlar bo`yicha uslubiy qo`llanma. Samarqand 2012.

2. Соатов Ё.У. Олий математика курси. I, II қисм. –Т.: Ўқитувчи, 1994.

3. Usmonov F.R., Isomov R.D., Xo‘jaev B.O. Matematikadan qo‘llanma. –T.: Yangi asr avlodi, 2006.