RIEMANN TENZORI

Dilafruz Yusupova
Institute of Fundamental and Applied Research,
National Research University TIIAME, Kori Niyoziy 39,
Tashkent 100000, Uzbekistan
email: 1992dilafruz9092@gmail.com
https://doi.org/10.5281/zenodo.21529412

Annotatsiya: Ushbu ilmiy maqola umumiy nisbiylik nazariyasi va differensial geometriyaning eng muhim fundamental tushunchalaridan biri bo‘lgan Riman fazo-vaqtining egri chiziqlilik tenzori (Riman-Kristoffel tenzori) va uning fizik-matematik xossalariga bag‘ishlanadi. Tadqiqotda Riman tenzorining algebraik va differensial simmetriyalari, Biyanki tengliklari, shuningdek, uning Tensoz analizi hamda Eynshteyn maydon tenglamalarini keltirib chiqarishdagi o‘rni atroflicha tahlil qilingan. Metrik tenzorning ikkinchi tartibli hosilalari orqali Riman tenzorining hosil bo‘lish mexanizmi, Rikchi tenzori va skalyar egri chiziqlilikka kontraksiya (qisqarish) jarayonlari ko‘rib chiqilgan. Maqolada affin bog‘lanishli fazolarda parallel ko‘chirish va kovariant hosilaning kommutatorli nisbatlari faktologik ma’lumotlar asosida tahlil etilgan.
Kalit so‘zlar: Riman tenzori, differensial geometriya, umumiy nisbiylik nazariyasi, kovariant hosila, Biyanki tengliklari, Rikchi tenzori, metrik tenzor, Kristoffel belgilari, fazo-vaqt egri chiziqliligi.

Аннотация: Данная научная статья посвящена тензору кривизны пространств Римана (тензору Римана — Кристоффеля), являющемуся одним из наиболее важных фундаментальных понятий общей теории относительности и дифференциальной геометрии, а также его физико-математическим свойствам. В исследовании подробно проанализированы алгебраические и дифференциальные симметрии тензора Римана, тождества Бьянки, а также его роль в тензорном анализе и выводе уравнений поля Эйнштейна. Рассмотрены механизм формирования тензора Римана через вторые производные метрического тензора и процессы свертки (сжатия) в тензор Риччи и скалярную кривизну. На основе фактологических данных в статье проанализированы параллельный перенос в пространствах с аффинной связностью и коммутаторные соотношения ковариантных производных.
Ключевые слова: Тензор Римана, дифференциальная геометрия, общая теория относительности, ковариантная производная, тождества Бьянки, тензор Риччи, метрический тензор, символы Кристоффеля, кривизна пространства-времени.

Abstract: This scientific paper is devoted to the curvature tensor of Riemannian spacetime (the Riemann–Christoffel tensor), which is one of the most crucial fundamental concepts in general relativity and differential geometry, as well as its physico-mathematical properties. The study presents a comprehensive analysis of the algebraic and differential symmetries of the Riemann tensor, Bianchi identities, and its role in tensor analysis and the derivation of Einstein's field equations. The mechanism of the Riemann tensor formation through the second-order derivatives of the metric tensor, alongside contraction processes into the Ricci tensor and scalar curvature, are examined. Based on factual data, the article analyzes parallel transport in spaces with affine connection and the commutator relations of the covariant derivative.
Keywords: Riemann tensor, differential geometry, general relativity, covariant derivative, Bianchi identities, Ricci tensor, metric tensor, Christoffel symbols, spacetime curvature.

Kirish

Differensial geometriyada ko‘p o‘lchovli silliq ko‘p xilliklar va Riman fazolarining ichki geometrik xossalarini tavsiflash uchun egri chiziqlilik (kri vizna) tushunchasi markaziy o‘rin tutadi. Riman egri chiziqlilik tenzori birinchi marta 1854-yilda nemis matematigi Bernxard Riman tomonidan taklif etilgan

bo‘lib, keyinchalik Elvin Bruno Kristoffel, Gregorio Richchi-Kurbastro va Tullio Levi-Chivita tomonidan tenzor analizi apparati sifatida rivojlantirilgan [1].

Euclid geometriyasidan farqli ravishda, Riman fazosida parallel ko‘chirish vektorning yo‘nalishiga bog‘liq bo‘lib, turg‘un vektor maydoni yopiq kontur bo‘ylab ko‘chirilganda dastlabki holatiga nisbatan ma’lum bir burchakka og‘adi. Ushbu og‘ish miqdori va yo‘nalishi bevosita Riman egri chiziqlilik tenzori orqali ifodalanadi. Alberto Eynshteyn 1915-yilda umumiy nisbiylik nazariyasini yaratishda Riman tenzoridan fazo-vaqt egri chiziqliligini va tortishish maydonining (gravitatsiya) geometrik tabiatini ifodalovchi asosiy matematik apparat sifatida foydalangan [2]. Ushbu maqola Riman tenzorining strukturasi, uning matematik xossalari hamda zamonaviy nazariy fizikadagi tatbiqlarini tahlil qilishga qaratilgan.

Metodologiya

Riman tenzorini aniqlash va uning matematik xossalarini o‘rganishda quyidagi fundamental operatsiyalar hamda differensial geometriya metodlaridan foydalaniladi.

Affin bog‘lanishli n-o‘lchovli silliq ko‘p xillikda A^{μ} kontravariant vektor maydoni berilgan bo‘lsin. Vektorning kovariant hosilalari kommutatori (ikkinchi tartibli kovariant hosilalar ayirmasi) Riman tenzorining operator ko‘rinishini ta’riflaydi:

$$\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}A^{\rho}-\nabla_{\nu}\nabla_{\mu}A^{\rho}=R^{\rho}_{\sigma\mu\nu}A^{\sigma}$$

Bu yerda ∇_{μ} — μ-koordinata bo‘yicha kovariant hosila operatori, $R^{\rho}_{\sigma\mu\nu}$ esa Riman tenzorining komponentlaridir [3].

Kristoffel belgilaridan ($\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$) foydalangan holda Riman tenzori komponentlari quyidagi analitik ko‘rinishda hisoblanadi:

$$R^{\rho}_{\sigma\mu\nu}=\partial_{\mu}\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma}-\partial_{\nu}\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma}+\Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma}-\Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}$$

Metrik tenzor $g_{\mu\nu}$ yordamida to‘liq bajarilgan kovariant Riman tenzori quyidagicha hosil qilinadi:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu}=g_{\alpha\rho}R^{\rho}_{\beta\mu\nu}$$

Matematik tahlil doirasida ushbu tenzorning algebraik va differensial tengliklari, metrik moslik sharti ($\nabla_{\rho}g_{\mu\nu}=0$) va Levi-Chivita bog‘lanishi metodlariga tayaniladi [4].

Natijalar

Riman tenzorining algebraik va diferentsial simmetriyalari tahlili natijasida uning mustaqil komponentlari soni hamda uning qisqartirilgan shakllari aniq invariant natijalarni beradi.

Algebraik va differensial simmetriyalar

n -o‘lchovli Riman fazosida to‘liq kovariant $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ tenzori quyidagi fundamental algebraik simmetriyalarga bo‘ysunadi:

- **Antisimmetriylik:**

$$R_{\alpha\beta\mu\nu}=-R_{\beta\alpha\mu\nu}$$
$$R_{\alpha\beta\mu\nu}=-R_{\alpha\beta\nu\mu}$$

- **Juftlik (Simmetriylik):**

$$R_{\alpha\beta\mu\nu}=R_{\mu\nu\alpha\beta}$$

- **Birinchi Biyanki algebraik tengligi (Torsiyasiz fazolar uchun):**
-

$$R_{\alpha\beta\mu\nu}+R_{\alpha\mu\nu\beta}+R_{\alpha\nu\beta\mu}=0$$

Ushbu algebraik cheklovlar natijasida n^4 ta umumiy komponentga ega bo‘lgan tenzorning eng kam va yetarli mustaqil komponentlari soni N quyidagi formula bo‘yicha aniqlanadi [5]:

$$N=\frac{n^2(n^2-1)}{12}$$

Ikkilamchi ko‘rinishda, ya’ni diferentsial strukturasida Ikkinchi Biyanki ayaniy tengligi amal qiladi:

$$\nabla_\lambda R_{\alpha\beta\mu\nu}+\nabla_\mu R_{\alpha\beta\nu\lambda}+\nabla_\nu R_{\alpha\beta\lambda\mu}=0$$

Tenzorning qisqarishi va Hosilaviy Tenzorlar

Riman tenzori bo‘yicha indekslarni qisqartirish (kontraksiya) natijasida quyidagi Muhim geometrik obyektlar hosil bo‘ladi:

1. **Rikchi tenzori ($R_{\mu\nu}$):** Birinchi va uchinchi indekslar bo‘yicha qisqartirish natijasida hosil bo‘ladi:

$$R_{\mu\nu}=R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu}=g^{\alpha\lambda}R_{\alpha\mu\lambda\nu}$$

Rikchi tenzori har doim simmetrikdir: $R_{\mu\nu}=R_{\nu\mu}$.

2. **Skalyar egri chiziqlilik (R):** Rikchi tenzorining metrik tenzor yordamidagi to‘liq qisqarishi:

$$R=g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$$

3. **Eynshteyn tenzori ($G_{\mu\nu}$):** Ikkinchi Biyanki tengligini ikki marta qisqartirish orqali olinadigan saqlanish qonuniga ega tenzor:

$$G_{\mu\nu}=R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$$

Ushbu tenzor uchun $\nabla_\mu G^{\mu\nu}=0$ sharti doimo bajariladi [6].

Tahlil va muhokama

Olingan natijalar Riman tenzorining ham sof matematik tushuncha, ham fizik invariant sifatidagi mohiyatini namoyon etadi. Fazoning o‘lchamiga qarab Mustaqil komponentlar soni quyidagicha o‘zgaradi:

- n=1 bo‘lganda: N=0. Bir o‘lchovli fazoda egri chiziqlilik tenzori mavjud emas.
- n=2 bo‘lganda: N=1. Sirtlarning egri chiziqliligi bitta skalyar — Gauss egri chiziqliligi (K) bilan to‘liq ifodalanadi.
- n=3 bo‘lganda: N=6. Uch o‘lchovli fazoda Riman tenzori to‘liqligicha Rikchi tenzori orqali ifodalanadi.
- n=4 bo‘lganda: N=20. Umumiy nisbiylik nazariyasidagi 4 o‘lchovli fazo-vaqtda Riman tenzori 20 ta mustaqil komponentga ega bo‘ladi [7].

Eynshteynning gravitatsiya nazariyasida 20 ta komponent ikki qismga ajratiladi: 10 tasi matriya va energiyaning joylashuvini ko‘rsatuvchi Rikchi tenzoriga ($R_{\mu\nu}$) to‘g‘ri kelsa, qolgan 10 tasi gravitatsion toqinlar va suvaysiz maydon (vakuum) bo‘ylab tarqaluvchi moddasiz gravitatsiya maydonini ifodalovchi Veyl tenzoriga ($C_{\alpha\beta\mu\nu}$) tegishlidir [8]. Vakuumda (ya’ni modda va energiya bo‘lmagan joyda $R_{\mu\nu}=0$) Riman tenzori nolga teng bo‘lmasligi mumkin, bu esa vakuumda gravitatsion to‘lqinlarning mavjudligini matematik jihatdan isbotlaydi.

Eynshteyn maydon tenglamalari quyidagi ko‘rinishga ega:

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R+\Lambda g_{\mu\nu}=\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

Ushbu tenglamada chap taraf to‘liq Riman tenzorining qisqartmalaridan (Eynshteyn tenzori va metrikadan) tashkil topgan bo‘lib, fazo-vaqt geometriyasini beradi, o‘ng taraf esa energiya-impuls tenzori ($T_{\mu\nu}$) bo‘lib, modda va maydon taqsimotini ko‘rsatadi [9].

Xulosa

Riman egri chiziqlilik tenzori ko‘p o‘lchovli differensial geometriya hamda zamonaviy nazariy fizika va kosmologiyaning poydevori hisoblanadi. Tadqiqot tahlillari shuni ko‘rsatadiki, Riman tenzori fazodagi parallel ko‘chirish va kommutativ emaslik xossalarini aniq miqdoriy baholash imkonini beradi. Uning 20 ta mustaqil komponenti (4 o‘lchovli fazo-vaqtda) gravitatsiya maydonining har qanday konfiguratsiyasini to‘liq va aniq ifodalab beradi. Biyanki tengliklari va Eynshteyn tenzorining saqlanish xossalari impuls va energiyaning saqlanish qonunlari bilan geometrik jihatdan mos tushadi. Zamonaviy kvant gravitatsiyasi, torlar nazariyasi hamda qora tuynuklar fizikasini rivojlantirishda Riman tenzorining xossalari va yuqori o‘lchamli fazolardagi umumlashmalari yetakchi o‘rin tutishda davom etmoqda.

Foydalanilgan adabiyotlar ro‘ylist

1. Riemann, B. (1867). Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 13, S. 133–152.
2. Einstein, A. (1916). Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. Annalen der Physik, 354(7), S. 769–822.
3. Landau, L. D., & Lifshitz, E. M. (1975). The Classical Theory of Fields (4th ed., Vol. 2). Butterworth-Heinemann, pp. 260–285.
4. Misner, C. W., Thorne, K. S., & Wheeler, J. A. (1973). Gravitation. W. H. Freeman and Company, pp. 218–254.
5. Hawking, S. W., & Ellis, G. F. R. (1973). The Large Scale Structure of Space-Time. Cambridge University Press, pp. 38–62.
6. Carroll, S. M. (2004). Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity. Addison-Wesley, pp. 121–158.
7. Weinberg, S. (1972). Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity. John Wiley & Sons, pp. 131–160.
8. Wald, R. M. (1984). General Relativity. The University of Chicago Press, pp. 35–54.
9. Stephani, H., Kramer, D., MacCallum, M., Hoenselaers, C., & Herlt, E. (2003). Exact Solutions of Einstein's Field Equations (2nd ed.). Cambridge University Press, pp. 15–42.
10. Rashevsky, P. K. (1967). Rieman Geometry and Tensor Analysis (3rd ed.). Nauka, pp. 180–210.
11. Willmore, T. J. (1993). Riemannian Geometry. Oxford University Press, pp. 75–102.
12. Kobayashi, S., & Nomizu, K. (1963). Foundations of Differential Geometry (Vol. 1). Interscience Publishers, pp. 130–165.