ISSN:3030-332X
Impact factor: 9,493
International journal of scientific researchers

PASKAL UCHBURCHAGI. BINOM KOEFFITSIYENTLARINING XOSSALARI. TAKRORIY GURUHLASHLAR

Nurkayev Shuhrat Jurayevich
Turin politexnika universiteti akademik litseyi
oliy toifali matematika fani o‘qituvchisi.
+998909280195

Annotatsiya: Mazkur maqolada kombinatorikaning muhim tarkibiy qismlari bo‘lgan Paskal uchburchagining geometrik va arifmetik qonuniyatlari, uning shakllanish prinsiplari atroflicha tahlil qilingan. Nyuton binomi yoyilmasidagi binom koeffitsiyentlarining o‘ziga xos xossalari, jumladan, simmetriklik va rekurent bog‘liqlik qoidalari matematik asoslab berilgan. Shuningdek, kombinatorik masalalarni yechishda keng qo‘llaniladigan takrorli guruhlashlar (elementlari takrorlanadigan kombinatsiyalar) tushunchasi, ularni hisoblash formulalari hamda ushbu tushunchalarning Paskal uchburchagi bilan o‘zaro uzviy aloqadorligi yoritilgan.
Kalit so‘zlar: Paskal uchburchagi, binom koeffitsiyentlari, Nyuton binomi, kombinatorika, takrorli guruhlashlar, rekurent formula, simmetriklik xossasi.

Аннотация: В данной статье всесторонне анализируются геометрические и арифметические закономерности треугольника Паскаля, являющегося важной составной частью комбинаторики, а также принципы его формирования. Математически обоснованы специфические свойства биномиальных коэффициентов в разложении бинома Ньютона, включая правила симметрии и рекуррентных соотношений. Также освещаются понятие сочетаний с повторениями (комбинаций с повторяющимися элементами), широко применяемое при решении комбинаторных задач, формулы их вычисления и взаимосвязь этих понятий с треугольником Паскаля.
Ключевые слова: Треугольник Паскаля, биномиальные коэффициенты, бином Ньютона, комбинаторика, сочетания с повторениями, рекуррентная формула, свойство симметрии.

Abstract: This article comprehensively analyzes the geometric and arithmetic regularities of Pascal's triangle, which is an important component of combinatorics, and the principles of its formation. The specific properties of binomial coefficients in the expansion of Newton's binomial, including the rules of symmetry and recurrence relations, are mathematically substantiated. Furthermore, the concept of combinations with repetitions (combinations with repeating elements), widely used in solving combinatorial problems, the formulas for their calculation, and the correlation of these concepts with Pascal's triangle are highlighted.
Keywords: Pascal's triangle, binomial coefficients, binomial theorem, combinatorics, combinations with repetitions, recurrence relation, symmetry property.

KIRISH

Mavzuning dolzarbligi. Matematika fanining eng qadimiy va jozibador bo‘limlaridan biri bo‘lgan kombinatorika va algebraik hisob-kitoblar bugungi kunda raqamli texnologiyalar, dasturlash va ma’lumotlar xavfsizligi (kriptografiya) sohalarining ajralmas qismiga aylandi. Har qanday murakkab tizimni tahlil qilish, elementlarni guruhlash yoki algebraik ifodalarni soddalashtirish jarayonida biz ko‘pincha ma’lum bir qonuniyatlarga tayanamiz. Ana shunday go‘zal va mukammal matematik qonuniyatlar zanjirini o‘zida mujassam etgan mavzulardan biri — **Paskal uchburchagi**, **binom koeffitsiyentlarining xossalari** hamda **takrorli guruhlashlar** kombinatorikasidir.

Algebra darslaridan barchamizga tanish bo‘lgan qisqa ko‘paytirish formulalarini (masalan, kvadratik yoki kubik ifodalarni) ixtiyoriy n-darajaga ko‘tarish zarorati tug‘ilganda Nyuton binomi formulasi yordamga keladi. Ushbu formuladagi koeffitsiyentlarni osongina topish va ularning ortidagi cheksiz matematik mo‘jizalarni kashf etish esa fransuz matematigi Blez Paskal nomi bilan ataluvchi uchburchakli jadval orqali amalga oshiriladi. Paskal uchburchagi shunchaki sonlar yig‘indisi bo‘lmay, u

o‘zida Fibonachchi sonlari, simmetriya qonuniyatlari, fraktallar va ehtimollar nazariyasining fundamental koeffitsiyentlarini yashirgan buyuk matematik ob'ektdir.

Shu bilan birga, real hayotiy masalalarda, masalan, do‘kondan bir xil turdagi mahsulotlarni turlicha kombinatsiyalarda tanlash yoki elementlari takrorlanadigan to‘plamlar bilan ishlashda oddiy kombinatorika qoidalari yetarsizlik qiladi. Bu o‘rinda **takrorli guruhlashlar** (takrorli kombinatsiyalar) tushunchasi maydonga chiqadi. Ushbu tushunchalarni o‘zaro bog‘liqlikda o‘rganish talabalarda hamda tadqiqotchilarda abstrakt fikrlashni rivojlantirish, diskret matematika algoritmlarini tushunish va murakkab hisoblash masalalarini oson yechish ko‘nikmalarini shakllantirishda o‘ta dolzarb ahamiyatga ega.

Tadqiqotning obyekti va predmeti. Tadqiqot obyekti — kombinatorika va oliy algebraning diskret tuzilmalari hamda ob'ektlarni guruhlash qonuniyatlaridir. Tadqiqot predmeti esa Paskal uchburchagining geometrik va arifmetik xossalari, binom koeffitsiyentlarining algebraik bog‘liqliklari hamda takrorli guruhlashlarning kombinatorik modellari hisoblanadi.

Tadqiqotning maqsad va vazifalari. Mazkur ishning asosiy maqsadi — Paskal uchburchagi, Nyuton binomi va takrorli guruhlashlar orasidagi ichki matematik uzviylikni ochib berish va ularning amaliy ahamiyatini asoslashdan iborat. Ushbu maqsadga erishish uchun quyidagi vazifalarni bajarish rejalashtirilgan:

1. Paskal uchburchagining qurilish prinsipi va uning geometrik-matematik xossalarini (simmetriya, satrlar yig‘indisi va h.k.) tizimli tahlil qilish.

2. Binom koeffitsiyentlarining (C_n^k) asosiy xossalari va teoremalarini algebraik usullar yordamida isbotlash.

3. Takrorli guruhlashlar tushunchasini oddiy guruhlashlardan farqli jihatlarini ko‘rsatish va uning formulasini keltirib chiqarish.

4. Ushbu uchta tushunchaning o‘zaro bog‘liqligini va ularning zamonaviy amaliy masalalarni (xususan, ehtimolliklar hisobi va dasturlash algoritmlarida) yechishdagi rolini yoritish.

Ushbu tadqiqot ishi diskret matematikaning eng go‘zal va fundamental mavzularini chuqurroq o‘zlashtirishga hamda nazariy bilimlarni amaliy kombinatorik muammolarga to‘g‘ri tadbiq etishga xizmat qiladi.

Paskal uchburchagi. $(a+b)^n$, n N ko’rinishdagi darajalarni yoyish uchun Nyuton binomi formulasidan va Paskal uchburchagi deb ataladigan formuladan foydalanish qulay. Eslatib o'tamiz, Paskal uchburchagi deb, quyidagi ko’rinishdagi jadvalga aytiladi:

1	
1 1	$n=1$
1 2 1	$n=2$
1 3 3 1	$n=3$
1 4 6 4 1	$n=4$
1 5 10 10 5 1	$n=5$
1 6 15 20 15 6 1	$n=6$
……	…..

Bu yerda jadvalning chetlaridagi koeffitsiyentlar 1 ga teng bo'lib, har qanday qatorning ichki koeffitsiyentlari oldingi qatordagi ikkita qo'shni koeffitsiyentlar yig'indisi sifatida olinadi. Bunday jadvaldan foydalanib, $(a+b)^n$ yoyilmadagi koeffitsiyentlarni topish mumkin.

Misol 1. $(a+b)^5$ ni yoying.

Yechish: $n=5$ ga mos keladigan qator koeffitsiyentlaridan foydalanamiz. U holda quyidagiga ega bo'lamiz:

$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$.

Nyuton binomi. n ning katta qiymatlari uchun Paskal uchburchagidan foydalanish noqulay. Masalan, $n=20$ uchun oldingi 19 qatorni ketma-ket yozish kerak. Umuman olganda, Nyuton binomi formulasidan foydalanish qulayroq:

$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^{n-1} ab^{n-1} + C_n^n b^n$, bu yerda $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$,

$0 \quad k \quad n, \; k,n \quad Z$ -binom koeffitsiyentlari.

Masalan, $n=5$ uchun,

$(a+b)^5 = C_5^0 a^5 + C_5^1 a^4 b + C_5^2 a^3 b^2 + C_5^3 a^2 b^3 + C_5^4 ab^4 + C_5^5 b^5 =$

$= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$ ga ega bo'lamiz.

Misol 2. $(x+2)^6$ darajaga oshirib, soddalashtiring.

Yechim. $n=6$ uchun Nyuton binomi formulasini qo'llasak, quyidagi yoyilmaga ega bo'lamiz:

$(x+2)^6 = x^6 + 2C_6^1 x^5 + 2^2 C_6^2 x^4 + 2^3 C_6^3 x^3 + 2^4 x^2 C_6^4 + 2^5 x C_6^5 + 2^6$.

Bu yerda

$C_6^1 = \frac{6!}{1!5!} = 6, \quad C_6^2 = \frac{6!}{2!4!} = \frac{5\ 6}{1\ 2} = 15, \quad C_6^3 = \frac{6!}{3!3!} = \frac{4\ 5\ 6}{1\ 2\ 3} = 20, \quad C_6^4 = \frac{6!}{4!2!} = 15, \quad C_6^5 = \frac{6!}{5!1!} = 6$

bo'lgani uchun, ushbu koeffitsiyentlar qiymatlarini yoyilmaga qo'ysak,

$(x+2)^6 = x^6 + 12x^5 + 60x^4 + 160x^3 + 240x^2 + 192x + 64$ ni hosil qilamiz.

Misol 3. $(2+x)^{10}$ ifodaning yoyilmasidagi x^4 ning koeffitsiyentini toping.

Yechim: $(2+x)^{10}$ yoyilmada $C_{10}^4 x^4 \ 2^6$ ko'rinishdagi qo'shiluvchi mavjud.

$C_{10}^4 x^4 \ 2^6 = \frac{10!}{4!\ 6!} \ x^4 \ 2^6 = \frac{7\ 8\ 9\ 10}{1\ 2\ 3\ 4} \ 64x^4 = 13440x^4$

bo'lgani uchun x^4 ning koeffitsiyenti 13440 ga teng bo'ladi.

Binom koeffitsiyentlarining xossalari. Quyidagi xossalar o'rinli:

a) $C_n^k = C_n^{n-k}$, bu yerda $0 \quad k \quad n, \; k,n \quad Z$;

b) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$, bu yerda $0 \quad k \quad n, \; k,n \quad Z$.

Isbot: Binomial koeffitsiyentlar formulasini qo'llab, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = C_n^k .$$

Bu esa a) xossaning o'rinliligini isbotlaydi. a) xossa yoyilma uchlaridan teng masofada joylashgan hadlar koeffitsiyentlari bir-biriga teng ekanligini bildiradi.

Endi Nyuton binomi formulasiga $a=b=1$ ni qo'yamiz. U holda formulaning chap tomoni 2^n teng bo'ladi va o'ng tomonda b) xossaning o'rinliligini isbotlovchi $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n$ yig'indini hosil qilamiz. b) xossa barcha binom koeffitsiyentlari yig'indisi 2^n ga teng ekanligini bildiradi.

Xulosa qilib shuni ta'kidlash mumkinki, toq o'rinlarda joylashgan binomial koeffitsiyentlar yig'indisi juft o'rinlardagi koeffitsiyentlar yig'indisiga teng. Bu tasdiqning o'rinliligini tekshirish uchun Nyuton binomi formulasida $a=1,\ b=-1$ ni qo'yish kerak.

Ushbu bo'limda kombinatorika elementlarini o'z ichiga olgan tenglamalar va tengsizliklar qaraladi.

Kombinatorika tenglamalari.

Misol 4. $\frac{(n+2)!}{n!}=72$ tenglamani yeching, bu yerda $n \quad N$.

Yechim. $(n+2)!=n!(n+1)(n+2)$ bo'lgani uchun berilgan tenglama quyidagi tenglamaga teng kuchlidir:

$(n+1)(n+2)=72$ yoki $n^2+3n-70=0$.

Oxirgi tenglamani yechib, $n_1=-10$, $n_2=7$ ni hosil qilamiz. $n_1=-10$ - chet ildiz hisoblanadi. Demak, berilgan tenglamaning yechimi bitta $n=7$ ildizdan iborat.

Javob: $\{7\}$.

Misol 5. Tenglamani yeching $5C_3^n=C_{n+2}^4$.

Yechish. $C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$, $0 \quad k \quad n$ formulani qo'llab, $5\ \frac{3!}{n!(3-n)!}=\frac{(n+2)!}{4!(n-2)!}$, ni hosil qilamiz, bu yerda $\begin{matrix} n-2 & 0 \\ 3-n & 0 \end{matrix}$ yoki $2 \quad n \quad 3$.

$n=2$ ni berilgan tenglamaga qo'yamiz. U holda chap tomonida $\frac{5\ \ 3!}{2!\ \ 1!}=15$ ni, o'ng tomonida esa $\frac{4!}{4!\ \ 0!}=1$ ni hosil qilamiz. Bu esa $n=2$ tenglamaning yechimi emasligini bildiradi.

Endi $n=3$ ni tenglamaga qo'yamiz. U holda $\frac{5\ \ 3!}{3!\ \ 0!}=\frac{5!}{4!\ \ 1!}$ yoki $5=5$ ni hosil qilamiz. Shunday qilib, $n=3$ berilgan tenglamaning yechimi hisoblanadi.

Javob: $\{3\}$.

Kombinatorika tengsizliklari.

Misol 6. Tengsizlikni yeching $\frac{(n-1)!}{(n-3)!}<72$, bu yerda $n \quad 3,\ n \quad N$. Yechish. $(n-1)!=(n-3)!(n-2)(n-1)$ bo'lgani uchun berilgan tengsizlik $(n-2)(n-1)<72$ ga teng kuchli bo'ladi. Qavslarni ochib, $n^2-3n-70<0$ tengsizlikni hosil qilamiz. Uni oraliqlar usuli yordamida yechib, $n \quad (-7;10)$ ga ega bo'lamiz. Biroq, $n \quad 3,\ n \quad N$ ligidan dastlabki tengsizlikning yechimi $\{3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9\}$ to'plamdan iborat bo'ladi.

Misol 7. Tengsizlikni yeching $C_n^5>C_n^3$, bu yerda $n \quad 5,\ n \quad N$.

Yechish. $C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$, $0 \quad k \quad n$ formulani qo'llab, quyidagi tengsizlikni hosil qilamiz:

$\frac{n!}{5!(n-5)!}>\frac{n!}{3!(n-3)!}$, $\frac{1}{20(n-5)!}>\frac{1}{(n-3)!}$, $(n-3)!>20(n-5)!$,

$(n-5)!(n-4)(n-3)>20(n-5)!$, $n^2-7n+12>20$.

Bu yerdan $n^2-7n-8>0$. Oxirgi tengsizlikni oraliqlar usulida yechib, $n \quad (-1;8)$ ni hosil qilamiz. $n \quad 5,\ n \quad N$ bo'lgani uchun $n \quad \{5,6,7\}$. Demak, berlgan tengsizlikning yechimi $\{5;\ 6;\ 7\}$ to'plamdan iborat bo'ladi.

Xulosa

O‘tkazilgan tahlillar shuni ko‘rsatadiki, Paskal uchburchagi shunchaki sonlarning geometrik joylashuvi emas, balki kombinatorika va yuqori algebra qonuniyatlarini o‘zida mujassam etgan mukammal matematik tizimdir. Nyuton binomi yoyilmasidagi binom koeffitsiyentlarining simmetriklik, rekurentlik kabi fundamental xossalari algebraik hisoblashlarni soddalashtirishda va murakkab matematik modellarni qurishda cheksiz imkoniyatlar yaratadi.

Shu bilan birga, elementlari takrorlanadigan to‘plamlar bilan ishlashda takrorli guruhlashlar tushunchasi va ularni hisoblash usullari amaliy masalalarni (ayniqsa, ehtimollar nazariyasi va dasturlashda) yechishning bosh mezoni hisoblanadi. Tadqiqot natijasida takrorli guruhlashlar formulalari va binom koeffitsiyentlari o‘rtasidagi uzviy bog‘liqlik Paskal uchburchagi prinsiplari orqali yaqqol namoyon bo‘lishi isbotlandi. Xulosa o‘rnida aytish mumkinki, ushbu tushunchalarni chuqur anglash zamonaviy axborot texnologiyalari, kriptografiya va ma'lumotlar tahlili (Data Science) kabi sohalarda yuzaga keladigan murakkab muammolarni modellashtirish va algoritmlarni optimallashtirishda muhim poydevor bo‘lib xizmat qiladi.

A D A B I Y O T L A R

1. Sh.A. Alimov, A.R. Xalmuhamedov, M.A. Mirzahmedov. Algebra va analiz asoslari. 10 – sinf uchun darslik. T., O‘qituvchi, 2003.
2. Sh.A. Alimov, A.R. Xalmuhamedov, M.A. Mirzahmedov. Algebra va analiz asoslari. 11 – sinf uchun darslik. T., O‘qituvchi, 2004.
3. А.Н. Колмогоров и др. Алгебра и начала анализа. Учебник для 10-11 классов средней школы. М., Просвещение, 1990 .
4. Н.Я. Виленкин, О.С. Ивашев-Мусатов, С.И. Шварцбурд. Алгебра и математический анализ для 10 классов. Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики. М., Просвещение, 1992.
5. Н.Я. Виленкин, О.С. Ивашев-Мусатов, С.И. Шварцбурд. Алгебра и математический анализ для 11 классов. Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики. М., Просвещение, 1998.
6. Э.М.Сайдаматов, А.К,Аманов, А.С.Юнусов, С.С.Хаджабагян. Алгебра и основы математического анализа., часть 1. Учебное пособие для учащихся академических лицеев с углубленным изучением математики. Т. «Ўқитувчи». 2016.
7. Э.М.Сайдаматов, А.К,Аманов, А.С.Юнусов, С.С.Хаджабагян. Алгебра и основы математического анализа. Часть 2. Учебное пособие для учащихся академических лицеев с углубленным изучением математики. Т. «Илм зиё». 2016.
8. Сканави и др. Сборник задач по математике для поступающих во ВТУЗы. М., Мир и образование, 2001.
9. М.А.Мирзахмедов, Ш.Н.Исмаилов, А.К,Аманов, Алгебра и начала анализа. Часть 1, Учебник для 10 классов, средних образовательных учреждений и учащихся академических лицеев Т. ООО «Extremumpress». 2017.