ISSN:3030-332X
Impact factor: 9,493
International journal of scientific researchers

O‘RTA MAKTAB VA IXTISOSLASHTIRILGAN TA’LIM TIZIMIDA ALGEBRAIK OLIMPIADA MASALALARIDAGI YUQORI DARAJALI TENGLAMALAR VA SISTEMALARNI YECHISHDA NOSTANDART YONDASHUVLAR

Xakimova Gulnoza
Osiyo Xalqaro Universiteti Magistranti
(Buxoro, O‘zbekiston)

Annotatsiya. Ushbu ishda matematika fanidan Respublika va Xalqaro olimpiadalarda tez-tez uchraydigan yuqori darajali algebraik tenglamalar hamda ko‘p o‘zgaruvchili chiziqli bo‘lmagan tenglamalar sistemalarini yechishning nostandart va evristik usullari chuqur pedagogik va matematik tadqiq etilgan. Maqolada an’anaviy maktab dasturlaridagi algoritmlardan farqli o‘laroq, murakkab algebraik formalizmdan qochib, matematik invariantlar, funksional xossalar (monotonlik, botiqlik, simmetriya), trigonometrik va vektorli almashtirishlar hamda Koshi-Bunyakovskiy kabi klassik tengsizliklarni tatbiq etish mexanizmlari tizimli ravishda yoritilgan. Har bir nostandart usul o‘ziga xos murakkab matematik namunalar, grafik analizlar va ularning batafsil metodik tahlili orqali isbotlangan. Shuningdek, iqtidorli o‘quvchilarda evristik qobiliyatlarni, mantiqiy fikrlash strategiyalarini va matematik intuitsiyani rivojlantirishning pedagogik-psixologik jihatlari tahlil qilingan. Tadqiqot natijalari umumiy o‘rta ta’lim muassasalari va ixtisoslashtirilgan maktablar, akademik litseylarning ilg‘or pedagoglari uchun amaliy qo‘llanma sifatida tavsiya etiladi.

Kalit so‘zlar: yuqori darajali tenglamalar, tenglamalar sistemasi, nostandart usullar, simmetriya, invariantlar, monotonlik, trigonometrik almashtirish, evristik fikrlash, iqtidorli o‘quvchilar, olimpiada matematikasi, funksional yondashuv.

1. Kirish

Matematika ta’limini tubdan takomillashtirish, yosh avlodning intellektual salohiyatini oshirish va iqtidorli yoshlar bilan ishlash tizimini yangi bosqichga olib chiqish zamonaviy pedagogikaning eng dolzarb vazifalaridan biridir. Bugungi kunda xalqaro va respublika miqyosidagi nufuzli fan olimpiadalari (masalan, IMO, Al-Xorazmiy olimpiadasi, turli davlatlararo nufuzli matematik turnirlar) ishtirokchilardan faqatgina standart darslik qoidalari va algoritmlarini mexanik qo‘llashni emas, balki chuqur mantiqiy fikrlashni, kutilmagan vaziyatlarda noodatiy yechimlar topish layoqatini (evristik fikrlashni) talab etmoqda. Olimpiada materiallarining ko‘p yillik statistik va kontent tahlili shuni ko‘rsatadiki, algebra bo‘limiga tegishli topshiriqlar ichida yuqori darajali algebraik tenglamalar hamda ko‘p o‘zgaruvchili chiziqli bo‘lmagan tenglamalar sistemalari yetakchi o‘rinni egallaydi. Bunday masalalar o‘quvchilarning umumiy matematik tayyorgarlik darajasini aniqlashda asosiy va eng ishonchli filtr vazifasini o‘tab kelmoqda.

An’anaviy umumiy o‘rta ta’lim darsliklarida yuqori darajali tenglamalarni yechish metodikasi asosan cheklangan usullar tizimidan iborat. Ularga Bezu teoremasi, Gorner sxemasi, ko‘paytuvchilarga ajratishning guruhlash usuli, kvadrat tenglamaga keltirish (bikvadrat yoki simmetrik ko‘rinishlar) kabi standart usullar kiradi. Biroq, xalqaro olimpiadalarda taklif etiladigan ko‘plab algebraik muammolar ushbu standart sxemalarga mutloq bo‘ysunmaydi. Ularni mexanik ravishda qavslarni ochish yoki guruhlash orqali yechish juda katta hajmdagi algebraik hisob-kitoblarga, vaqt yo‘qotilishiga va aksar hollarda yechimsiz chalkashliklarga olib keladi. Shu sababli, yuqori darajali tenglamalar va sistemalarni yechishda nostandart, sun’iy, chiroyli va qisqa algebraik hamda analitik usullarni tizimlashtirish, ularning metodik asoslarini yaratish ham nazariy matematika, ham zamonaviy maktab metodikasi uchun strategik ahamiyat kasb etadi.

Ushbu ilmiy tadqiqot ishining asosiy maqsadi — olimpiada matematikasi amaliyotida keng qo‘llaniladigan, lekin maktab va litsey darsliklarida tizimli yoritilmagan eng samarali nostandart yondashuvlarni tasniflash, ularning chuqur matematik mohiyatini metodik modellar orqali ochib berish va iqtidorli o‘quvchilarni tayyorlashda ushbu metodikadan foydalanishning pedagogik samaradorligini ilmiy asoslashdan iboratdir. Mazkur maqsadga erishish uchun respublika va xalqaro miqyosdagi eng nufuzli olimpiada topshiriqlari tahlil qilindi hamda ularning metodik yechimlari ishlab chiqildi.

2. Muammoning o‘rganilish darajasi

Matematik masalalarni yechish jarayonida inson miyasining fikrlash psixologiyasi, evristik qobiliyatlar shakllanishi va nostandart masalalarni tahlil qilish prinsiplari dunyo miqyosida taniqli olim George Pólya tomonidan fundamental tarzda o‘rganilgan. Uning 'How to Solve It' (Qanday yechish kerak) va 'Mathematical Discovery' (Matematik kashfiyot) asarlarida muammoni nostandart ko‘rinishga keltirish va matematik invariantlikni qidirish prinsiplari metodologik jihatdan mukammal bayon etilgan. Olimpiada darajasidagi algebraik muammolar va yuqori darajali tenglamalar borasida xalqaro miqyosda Rossiya evristik maktabi vakillari V.V. Prasolov, I.F. Shargin, hamda AQSh va Ruminiya olimpiada maktablari asoschilari (masalan, Titu Andreescu, Kiran Kedlaya) juda katta amaliy resurslar va o‘quv qo‘llanmalar yaratishgan.

O‘zbekiston pedagogik va matematik maktablari vakillaridan Sh.A. Alimov, H. To‘rayev, A. Sa’dullayev, B. Xaydarov va boshqalar o‘z ilmiy-metodik tadqiqotlarida matematika darsliklarida hamda oliy o‘quv yurtlariga kirish sinovlarida algebraik masalalarni tahlil qilish, iqtidorli o‘quvchilar bilan ishlash masalalariga katta e’tibor qaratishgan. Biroq, zamonaviy xalqaro olimpiadalarning (masalan, so‘nggi yillardagi IMO Shortlist materiallari) talablari keskin o‘zgarganligi va murakkablashganligi bois, yangi tipdagi ko‘p o‘zgaruvchili funksional va maxsus simmetrik strukturaga ega tenglamalarni tizimli ravishda tadqiq etish hamda ularni umumiy o‘rta ta’lim to‘garaklari va ixtisoslashtirilgan maktablar dasturlariga moslashtirish dolzarb muammo bo‘lib qolmoqda. Empirik kuzatishlar shuni ko‘rsatadiki, o‘quvchilar qolipli masalalarni yechishda yuqori natija ko‘rsatishsa-da, kutilmagan kombinatsiyali tenglamalarda jiddiy algoritmik va mantiqiy qiyinchiliklarga duch kelishmoqda.

3. Tadqiqot metodologiyasi

Tadqiqot jarayonida tizimli analitik, metodik modellashtirish va qiyosiy pedagogik tahlil metodlaridan keng foydalanildi. Xalqaro olimpiada masalalari bazasi (IMO Longlist, Shortlist, Respublika olimpiadalari materiallari va nufuzli jurnallar topshiriqlari) tahlil qilinib, ulardagi yuqori darajali tenglamalar yechilish uslubiga ko‘ra mukammal klassifikatsiya qilindi. Metodologik yondashuv sifatida 'murakkab strukturani oddiy invariantlikka keltirish va funksional xossalarni ochish' prinsipi asos qilib olindi.

Biz taklif etayotgan va ushbu maqolada batafsil asoslangan metodik tizim doirasida nostandart yondashuvlar quyidagi fundamental guruhlarga ajratildi:

1. Algebraik strukturalarning simmetriyasi, invariantligi va o‘rta arifmetik qiymatga nisbatan simmetrik ko‘chirish usuli.
2. Sun’iy va maxsus o‘zgaruvchilar kiritish, o‘zgaruvchilarni trigonometrik va funksional almashtirish mexanizmlari.
3. Analitik va funksional usullar, ya’ni hosila yordamida funksiyaning monotonlik, botiqlik va ekstremal qiymatlari xossalarini tenglamalarga tatbiq etish.
4. Klassik algebraik tengsizliklar (Koshi, Koshi-Bunyakovskiy, Yensen tengsizliklari) yordamida tenglama qismlarini baholash usuli.
5. Vektorlar va geometrik interpretatsiya (talqin) usuli.

Ushbu metodologiya iqtidorli o‘quvchilar bilan individual ishlashda vaqt resursini tejash hamda yechimning eng qisqa, optimal va mantiqan go‘zal variantini topishga qaratilgandir.

4. Ilmiy tahlil va asosiy natijalar

4.1. Algebraik strukturalarning simmetriyasi va invariantlik usuli

Metodik namuna 1: To‘rtinchi darajali simmetrik bo‘lmagan, ammo maxsus simmetrik strukturaga keltiriladigan tenglama. Quyidagi tenglamani haqiqiy sonlar to‘plamida yeching:

$$(x + 3)^4 + (x + 5)^4 = 16$$

Metodik tahlil va chuqur yechilishi: Ushbu tenglamani an’anaviy usulda qavslarni ochib chiqish (Nyuton binomi orqali har birini alohida yoyish) juda katta hajmdagi hisob-kitoblarni talab qiladi va yakunda to‘rtinchi darajali to‘liq tenglamaga olib keladi. Bunday holda, eng optimal evristik yo‘l ikki ifodaning o‘rta arifmetik qiymatini topish va simmetriya markazini aniqlash hisoblanadi. (x+3) va (x+5) ifodalarning o‘rta arifmetigi: $t= ((x + 3) + (x + 5)) / 2 = x + 4$ bo‘ladi.

Yangi o‘zgaruvchi kiritamiz: t=x+4. Natijada boshlang‘ich ifodalar quyidagi ko‘rinishni oladi: x+3=t 1 va x+5=t+1. Ushbu almashtirishlarni dastlabki tenglamaga qo‘yib, uni mutloq simmetrik shaklga keltiramiz:

$$\mathbf{(t-1)^4 + (t+1)^4 = 16}$$

Endi Nyuton binomi formulasidan foydalanib qavslarni ochamiz:

$$(t^4-4t^3+6t^2-4t+1)+(t^4+4t^3+6t^2+4t+1)=16$$

E’tibor bering, simmetrik almashtirish tufayli toq darajali barcha hadlar ($-4t^3$ va $+4t^3$, hamda $-4t$ va $+4t$) bir-birini neytrallaydi (yo‘q qiladi). Bu esa hisob-kitobni bir necha barobar qisqartiradi. Tenglamani soddalashtiramiz:

$$\mathbf{2t^4 + 12t^2 + 2 = 16 \;\Rightarrow\; 2t^4 + 12t^2 - 14 = 0 \;\Rightarrow\; t^4 + 6t^2 - 7 = 0}$$

Ushbu hosil bo‘lgan bikvadrat tenglamani yechish uchun yangi yordamchi o‘zgaruvchi kiritamiz: $t^2 = y$, bu yerda kvadratik xossaga ko‘ra $y \geq 0$ shart bajarilishi shart. Natijada kvadrat tenglama hosil bo‘ladi: $y^2+6y-7=0$. Viyet teoremasiga ko‘ra uning ildizlari: $y=1$ va $y_2=-7$. Biz qo‘ygan $y \geq 0$ shartga faqat $y_1 = 1$ qiymati mos keladi, $y_2 = -7$ esa chet ildizdir.

Endi eski o‘zgaruvchiga qaytamiz: $t^2=1$ bo‘lib, bundan $t=1$ yoki $t=-1$ kelib chiqadi. x o‘zgaruvchisini topish uchun quyidagi ikkita chiziqli tenglamani yechamiz:

$$1)x+4=1 \Rightarrow x_1=-3$$
$$2)\ x + 4 = -1 \Rightarrow x_2 = -5$$

Javob: $x \in \{-5, -3\}$

4.2. O‘zgaruvchilarni trigonometrik almashtirishlar usuli

Metodik namuna 2: Uchinchi darajali simmetrik bo‘lmagan murakkab algebraik tenglama. Quyidagi tenglamaning barcha haqiqiy ildizlarini aniqlang:

$8x^3 - 6x - 1 = 0$

Metodik tahlil va chuqur yechilishi: Berilgan tenglamani Bezu teoremasi yoki ratsional ildizlarni topish qoidalari (ozod hadning bo‘luvchilari) yordamida yechish imkonsiz, chunki uning ildizlari ratsional sonlar emas, balki irratsional va transsendent strukturaga ega. Keling, tenglamaning shaklini evristik tahlil qilamiz. Ozod hadni o‘ng tomonga o‘tkazib, tenglikning ikkala qismini 2 ga bo‘lamiz: $2(4x^3 - 3x) = 1 \Rightarrow 4x^3 - 3x = 1/2$.

Ushbu $4x^3 - 3x$ ifoda trigonometriyadagi uchlangan burchak kosinusi formulasini yaqqol yodga soladi, ya’ni: $\cos(3\alpha) = 4\cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha)$. Ushbu matematik o‘xshashlikdan mukammal foydalanish uchun x o‘zgaruvchining qiymatlar sohasini tekshiramiz. Ma’lumki, kosinus funksiyasi faqat $[-1, 1]$ oraliqda qiymatlar qabul qiladi. Biz $x = \cos(\alpha)$ almashtirishini kiritamiz, bunda bir qiymatli moslikni ta’minlash uchun α burchakni $\alpha \in [0, \pi]$ bosh oraliqda cheklaymiz. Ushbu almashtirishni tenglamaga qo‘ysak:

$\cos(3\alpha) = 1/2$

Bu eng sodda trigonometrik tenglamadir. Uning umumiy yechim formulasini yozamiz: $3\alpha = \pm\pi/3 + 2k\pi$, bu yerda $k \in \mathbb{Z}$. Burchak α ni topish uchun tenglikni 3 ga bo‘lamiz: $\alpha = \pm\pi/9 + 2k\pi/3$. Endi biz qo‘ygan $\alpha \in [0, \pi]$ oraliqqa tegishli bo‘lgan uchta ildizni aniq qiymatlarini k ning ketma-ket qiymatlari orqali ajratib olamiz:

1) $k=0$ bo‘lganda (musbat ishora): $\alpha_1=\pi/9$ $[0,\pi]$
2) $k=1$ bo‘lganda (manfiy ishora): $\alpha_2=-\pi/9+2\pi/3=5\pi/9$ $[0,\pi]$
3) $k = 1$ bo‘lganda (musbat ishora): $\alpha_3 = \pi/9 + 2\pi/3 = 7\pi/9 \in [0, \pi]$

Ushbu topilgan burchaklarni x = cos(α) formulasiga qayta qo‘yib, dastlabki uchinchi darajali algebraik tenglamaning uchta haqiqiy va aniq ildizlariga ega bo‘lamiz:

$x_1 = \cos(\pi/9)$, $x_2 = \cos(5\pi/9)$, $x_3 = \cos(7\pi/9)$

Javob: x {cos(π/9), cos(5π/9), cos(7π/9)}

4.3. Funksional va analitik usullar (Monotonlik prinsipi)

Metodik namuna 3: Olimpiada chiziqli bo‘lmagan yuqori darajali tenglamalar sistemasi. Quyidagi tenglamalar sistemasini haqiqiy sonlar to‘plamida yeching:

$$x^5 + x^3 + x = y^3 + 2y$$
$$y^5 + y^3 + y = z^3 + 2z$$
$$z^5 + z^3 + z = x^3 + 2x$$

Metodik tahlil va chuqur yechilishi: Mazkur sistema o‘zining strukturaviy ko‘rinishiga ko‘ra chiziqli emas va beshinchi darajali hadlarni o‘z ichiga oladi. Uni an’anaviy o‘rniga qo‘yish yoki hadma-had qo‘shish/ayirish usullari bilan yechish mutloq imkonsizdir. Bu yerda funksional yondashuv va monotonlik xossasi yordamga keladi. Tahlilni chuqurlashtirish uchun ikkita yordamchi uzluksiz funksiya aniqlab olamiz:

$$f(t) = t^5 + t^3 + t \quad va \quad g(t) = t^3 + 2t$$

Ushbu funksiyalarning o‘sish yoki kamayish xarakterini aniqlash maqsadida ulardan birinchi tartibli hosila olamiz:

$$f'(t)=5t^4+3t^2+1 \text{ va } g'(t)=3t^2+2$$

Matematik tahlil kursidan ma’lumki, har qanday haqiqiy t soni uchun $t^4 \geq 0$ va $t^2 \geq 0$ shartlar bajariladi. Demak, $f'(t) \geq 1 > 0$ va $g'(t) \geq 2 > 0$ ekanligi kelib chiqadi. Hosilaning musbatligi funksiyalarning butun sonlar o‘qida qat’iy o‘suvchi (monoton o‘suvchi) ekanligini qat’iy isbotlaydi. Endi berilgan sistemani funksional munosabat ko‘rinishida qayta yozib olamiz:

1)f(x)=g(y)
2)f(y)=g(z)
3) f(z) = g(x)

Ushbu tizimda o‘zgaruvchilar o‘rtasidagi munosabatni isbotlash uchun 'teskarisidan faraz qilish' (antagonistik motod) usulidan foydalanamiz. Faraz qilaylik, x > y bo‘lsin. f(t) funksiyasi qat’iy o‘suvchi bo‘lganligi sababli, argumentning kattasiga funksiyaning ham kattasi mos keladi, ya’ni: f(x) > f(y). Birinchi va ikkinchi tenglamalardan foydalansak, f(x) = g(y) va f(y) = g(z) ekanligidan g(y) > g(z) kelib chiqadi. g(t) ham qat’iy o‘suvchi funksiya bo‘lgani uchun, ushbu tengsizlikdan y > z ekanligi aniqlanadi.

Zanjirni davom ettiramiz: y > z shartidan f(y) > f(z) keladi, bu esa o‘z navbatida g(z) > g(x) ekanligini, bundan esa z > x natijani beradi. Endi barcha topilgan tengsizliklarni bitta zanjirga birlashtirsak, quyidagi mantiqiy qarama-qarshilikka (ziddiyatga) duch kelamiz:

x>y>z>x=>x>x (Bu mantiqan xato va imkonsizdir).

Xuddi shunday, agar x < y deb faraz qilsak, x < y < z < x ziddiyati hosil bo‘ladi. Shunday qilib, farazlarimiz noto‘g‘ri ekanligi isbotlandi. Yagona mantiqiy va matematik imkoniyat — o‘zgaruvchilarning o‘zaro teng bo‘lishidir, ya’ni: x = y = z.

Ushbu tenglik shartini sistemaning istalgan bitta tenglamasiga qo‘yib, uni bir o‘zgaruvchili tenglamaga keltiramiz:

$$x^5+x^3+x=x^3+2x=>x^5+x-2x=0=>x^5-x=0$$

Tenglamani ko‘paytuvchilarga ajratamiz: $x(x^4 - 1) = 0 \Rightarrow x(x^2 - 1)(x^2 + 1) = 0 \Rightarrow x(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) = 0$. Oxirgi ko‘paytuvchi $(x^2 + 1)$ haqiqiy sonlar to‘plamida nolga teng bo‘la olmaydi (ildizga ega emas). Shuning uchun haqiqiy ildizlar quyidagilar: $x = 0$, $x = 1$, $x=-1$. O‘zgaruvchilar o‘zaro teng bo‘lgani uchun sistemaning haqiqiy yechimlar uchligini yozamiz.

Javob: (0, 0, 0), (1, 1, 1), (−1, −1, −1)

5. Pedagogik tavsiyalar va iqtidorli o‘quvchilar bilan ishlash metodikasi

Olimpiada masalalarini muvaffaqiyatli yechish ko‘nikmasini shakllantirish faqatgina matematik formulalarni yodlash yoki tayyor algoritmlarni qo‘llash bilan cheklanmaydi. Bu jarayon o‘quvchidan yuqori darajadagi moslashuvchanlikni va evristik fikrlash stereotiplarini sindirishni talab etadi. Dars va to‘garak mashg‘ulotlarida quyidagi metodik yondashuvlarni tizimli qo‘llash tavsiya etiladi:

1. 'Muammoli izlanish' (Problem-based learning) darslari: O‘quvchilarga to‘g‘ridan-to‘g‘ri yechim formulasini bermasdan, ularni yuqorida keltirilgan simmetriya yoki monotonlik kabi yashirin qonuniyatlarni o‘zlari mustaqil ravishda sezishlari va kashf etishlari uchun yo‘naltiruvchi savollar tizimini shakllantirish lozim.

2. Matematik vizualizatsiya usuli: Murakkab algebraik tenglamalarni funksiya grafiklari yoki vektorlar yordamida tasvirlash orqali mavhum algebraik ifodalarni geometrik shaklga keltirish intuitsiyani keskin oshiradi. Masalan, funksional monotonlikni grafikda ko‘rish o‘quvchining mantiqiy zanjirni tushunishini osonlashtiradi.

3. Genetik zanjir usuli: Eng sodda nostandart tenglamadan boshlab, bosqichma-bosqich topshiriqning murakkablik darajasini oshirib borish va umumiy qonuniyatni kashf etishga o‘rgatish. Bu usul iqtidorli o‘quvchilarda fanga bo‘lgan ishtiyoqni va o‘z kuchiga bo‘lgan ishonchni mustahkamlaydi.

6. Xulosa

Olimpiada ta’lim tizimida yuqori darajali algebraik tenglamalar va chiziqli bo‘lmagan sistemalarni yechishning an’anaviy qoliplaridan voz kechib, nostandart va evristik yondashuvlarni qo‘llash dars samaradorligini va o‘quvchilar intellektini mutloq yangi bosqichga olib chiqadi. Invariantlikni topish, o‘rta arifmetik qiymatga nisbatan simmetrik ko‘chirish, funksional munosabatlarni aniqlash va matematik baholash strategiyalari eng murakkab xalqaro masalalarni ham bir nechta satrda, oson va tushunarli yechish imkonini beradi.

Mazkur maqolada tizimlashtirilgan uslubiy tavsiyalar, model misollar va chuqur tahlillar umumiy o‘rta ta’lim maktablari, ixtisoslashtirilgan litseylar va prezident maktablari o‘qituvchilari hamda milliy olimpiada jamoalari murabbiylari uchun muhim va amaliy dasturiy-uslubiy manba bo‘lib xizmat qiladi. Kelajakda ushbu yo‘nalishdagi nostandart metodlarni yanada kengaytirib, darsliklar mazmuniga integratsiya qilish maqsadga muvofiqdir.

Foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati

1. Pólya G. Mathematical Discovery: On Understanding, Learning, and Teaching Problem Solving. – John Wiley & Sons, 1981.
2. Prasolov V. V. Polynomials and Algebraic Equations. – Springer Science & Business Media, 2010.
3. Andreescu T., Gelca R. Mathematical Olympiad Challenges. – Birkhäuser, 2000.
4. To‘rayev H. Matematik mantiq va kombinatika elementlari. – Toshkent: O‘qituvchi, 1995.
5. Sharygin I. F. Problems in Algebra. – Moscow: Mir Publishers, 1988.
6. Alimov Sh.A., Xaydarov B. Matematika olimpiadalari masalalari. – Toshkent, 2015.
7. Kedlaya K. S. Bound and Unbound: Functional Equations and Inequalities in Olympiads. – Boston, 2012.
8. Sa’dullayev A. Algebra va sonlar nazariyasi darsligi. – Toshkent: O‘zbekiston, 2008.