ISSN:3030-332X
Impact factor: 9,493
International journal of scientific researchers

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА СВЯЗАННОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ В НАПРЯЖЕНИЯХ С УЧЁТОМ КОНЕЧНОЙ СКОРОСТИ ТЕПЛОВЫХ ПОТОКОВ В ПРОИЗВОЛЬНОЙ КРИВОЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Салиев А.А.

Ташкентский государственный экономический университет, кафедра высшей и прикладной математики, г. Ташкент, Узбекистан

Аннотация: В статье выведена замкнутая система уравнений нестационарной связанной термоупругости, записанная непосредственно через компоненты тензора напряжений для изотропного тела в произвольной криволинейной ортогональной системе координат. Принципиальным отличием от классической постановки является учёт конечной скорости распространения тепловых потоков на основе гиперболического закона теплопереноса Каталано–Вернотта. Введён термически скорректированный тензор напряжений, обеспечивающий симметричную и компактную запись системы. Получено уравнение баланса термомеханической энергии в напряжениях, ранее не публиковавшееся для данного класса задач. Показано, что полученные уравнения являются полным иерархическим обобщением статических уравнений Бельтрами–Митчелла и их динамического аналога Новацкого.

Ключевые слова: термоупругость, тензор напряжений, уравнения Бельтрами–Митчелла, гиперболическая теплопроводность, криволинейные координаты, конечная скорость тепловых потоков, связанная термоупругость.

1. ВВЕДЕНИЕ

Классические уравнения совместности деформаций в напряжениях — уравнения Бельтрами–Митчелла — были сформулированы во второй половине XIX века [1] для статических задач линейно-упругой изотропной среды. Их практическая ценность состоит в возможности непосредственного определения поля напряжений при граничных условиях, заданных в силах, без промежуточного вычисления поля перемещений.

Первое обобщение этих уравнений на динамический случай в декартовой системе координат было предложено Новацким [2] в рамках классической (параболической) теории теплопроводности Фурье. Однако параболическое уравнение теплопроводности предполагает мгновенное распространение тепловых возмущений, что противоречит физическому принципу конечности скорости передачи сигнала. В задачах с интенсивным кратковременным нагревом — лазерная обработка, ударные нагрузки, криогенные воздействия — это приводит к существенным погрешностям.

Гиперболические модели теплопереноса, устраняющие этот недостаток, были предложены Каталано [3] и Вернотта [4] (модель CV) и развиты в работах Лорда–Шульмана [5] и других авторов. В рамках этих моделей в уравнение теплопроводности вводится время релаксации $\tau_t > 0$, обеспечивающее конечную скорость распространения тепловых волн.

Тем не менее постановка задачи термоупругости непосредственно в напряжениях для произвольной криволинейной системы координат с учётом гиперболического теплопереноса в литературе отсутствует. Настоящая работа восполняет этот пробел, опираясь на тезисные результаты Земскова, Салиева и Тарлаковского [6] и существенно развивая их: введены новый тензор скорректированных напряжений, уравнение энергетического баланса в напряжениях и полная иерархическая классификация частных случаев.

Цель работы — вывести замкнутую систему уравнений нестационарной связанной термоупругости непосредственно в компонентах тензора напряжений в произвольной

криволинейной ортогональной системе координат, допуская конечную скорость распространения тепловых потоков, и исследовать структуру полученной системы.

2. ИСХОДНЫЕ СООТНОШЕНИЯ И МЕТОДОЛОГИЯ

2.1. Обобщённый обратный закон Гука

Рассмотрим изотропную термоупругую среду в произвольной криволинейной ортогональной системе координат x^i. Обратный закон Гука с учётом температурного расширения выражает компоненты тензора деформаций $\varepsilon^i{}_j$ через компоненты тензора напряжений $\sigma^i{}_j$:

$$\varepsilon_i^j = \frac{1}{2\mu}\left(\sigma_i^j - \frac{\nu}{(1+\nu)} I_1 \delta_i^j\right) + \alpha\Theta\delta_i^j$$

(1)

где μ — модуль сдвига; ν — коэффициент Пуассона; α — коэффициент линейного термического расширения; $\Theta = T - T_0$ — избыточная температура; T_0 — начальная температура; $\delta^i{}_j$ — символ Кронекера; I_1 — первый инвариант тензора напряжений:

$$I_1 = \sigma_k^k$$

(2)

2.2. Динамические уравнения движения в напряжениях

Дифференцирование уравнений Ламе по координатам, смена индексов и последующее суммирование приводят к уравнению движения термоупругой среды, записанному через тензор напряжений в криволинейной системе координат:

$$\nabla_i \sigma_j^i + \frac{1}{(1+\nu)} \nabla_i \nabla_j I_1 = \frac{\nu}{(1-\nu)} \delta_j^i \nabla_i \Theta + \left(F_j - \rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}\right)$$

(3)

Здесь ∇^2 — оператор Лапласа–Бельтрами в данной системе координат; ∇_i — ковариантная производная; F_i — компоненты вектора объёмных сил; ρ — плотность среды; $u^i{}_j$ — второе смешанное ковариантное производное от вектора перемещений по времени. Правая часть уравнения (3) включает инерционный член $\rho\partial^2 u^i{}_j/\partial t^2$, отсутствующий в статической постановке Бельтрами–Митчелла.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ

3.1. Термически скорректированный тензор напряжений (Новизна 1)

Введём термически скорректированный тензор напряжений $\sigma^{*i}{}_j$, вычитая из полного тензора $\sigma^i{}_j$ термический член:

$$\sigma_i^{j*} = \sigma_i^j - \frac{\beta E}{(1-2\nu)} \Theta \delta_i^j$$

(4)

Введение тензора $\sigma^{*i}{}_j$ обеспечивает исчезновение членов с градиентом температуры $\nabla\Theta$ в правой части уравнений движения (3). Это **первая новизна** настоящей работы: данная конструкция позволяет записать систему (3)–(4) в симметричной и компактной форме при

произвольном значении τ_t, тогда как в известных работах эквивалентного упрощения для криволинейных координат не предлагалось.

3.2. Уравнение баланса термомеханической энергии в напряжениях (Новизна 2)

Уравнение баланса внутренней энергии деформируемой термоупругой среды, выраженное через компоненты тензора напряжений:

$$\frac{dU}{dt} = \sigma_i^j \varepsilon\dot{}_j - q_{,i} + Q_s$$

(5)

где U — плотность внутренней энергии; q^i — вектор теплового потока; Q_s — объёмные тепловые источники. Уравнение (5) записано в криволинейной системе координат с гиперболическим законом теплопереноса и **ранее в такой формулировке в литературе не появлялось**. Это **вторая новизна** работы.

3.3. Замкнутая система в напряжениях: обобщение Бельтрами–Митчелла (Новизна 3)

После подстановки соотношений (1), (4), (5) и алгебраических преобразований получается главный результат работы — динамическое уравнение Бельтрами–Митчелла для криволинейной системы координат с гиперболической теплопроводностью:

$$I\sigma_i^{j*} + \frac{1}{(1+\text{н})} \; {}_i \; {}_j I_1^* + \text{с}\,\tau_T \frac{\partial^3 u_i^j}{\partial t^3} = \Phi_i^j\left(F,\Theta,\tau_T\right)$$

(6)

где $\Phi^i{}_j(F, \Theta, \tau_t)$ — правая часть, зависящая от объёмных сил, распределения температуры и времени релаксации; I^*_1 — первый инвариант скорректированного тензора напряжений. Член $\rho\tau_t \partial^3 u^i{}_j / \partial t^3$ является **третьей новизной**: он возникает исключительно из-за конечной скорости тепловых потоков и отсутствует во всех известных аналогах. Уравнение (6) является **полным динамическим обобщением уравнений Бельтрами–Митчелла** для криволинейных координат и гиперболической теплопроводности.

3.4. Запись через инженерные константы

Используя связи $\lambda = E\nu/[(1+\nu)(1-2\nu)]$, $\mu = E/[2(1+\nu)]$ между постоянными Ламе и инженерными константами, обратный закон Гука (1) принимает вид:

$$\varepsilon_i^j = \frac{(1+\text{н})}{E}\sigma_i^j - \frac{\nu}{E} I_1 Д_i^j + \alpha\Theta Д_i^j$$

(7)

Аналогичное преобразование выполняется для уравнений (3), (4), (6), что делает полученную систему непосредственно пригодной для практических расчётов.

3.5. Граничные и начальные условия в напряжениях

Нулевые начальные условия в напряжениях (следствие из нулевых начальных условий в перемещениях):

$\sigma^i{}_j|_{t=0} = 0, \quad \dot{\sigma}^i{}_j|_{t=0} = 0, \quad T|_{t=0} = T_0.$

Граничные условия на поверхности ∂G при заданных поверхностных силах P_i и тепловом потоке $\bar{q}$:

$\sigma^i{}_j \, n_j|_{\partial G} = P_i, \quad \partial T/\partial n|_{\partial G} = \bar{q}.$

4. Обсуждение

Сравнение с известными результатами. При $\tau_t = 0$ и в декартовой системе координат уравнения (3)–(4) совпадают с результатами Новацкого [2]. В статическом пределе (все производные по времени обращаются в нуль) система (7) переходит в классические уравнения Бельтрами–Митчелла. Таким образом, реализована полная иерархическая цепочка: Бельтрами–Митчелл (1880-е) → Новацкий (1961) → настоящая работа (криволинейные координаты + гиперболический теплоперенос).

Разделение переменных. Формулировка в напряжениях допускает применение метода разделения переменных в сепарабельных криволинейных системах (цилиндрические, сферические, эллиптические координаты) при граничных условиях первого рода по напряжениям. Это расширяет класс задач, допускающих аналитическое решение, по сравнению с постановкой в перемещениях.

Физический смысл члена третьей производной. Член $\rho\tau_t\,\partial^3 u/\partial t^3$ в уравнении (7) описывает эффект «тепловой инерции»: реакция механической системы на тепловое возмущение запаздывает на время τ_t относительно классического предсказания. Для металлов $\tau_t \sim 10^{-11}$–10^{-13} с, что существенно лишь при ультракоротких импульсных воздействиях. Для ряда биологических тканей и полимеров τ_t может достигать 10^{-2} с, что делает гиперболическую модель необходимой.

Ограничения модели. Полученная постановка справедлива для малых деформаций, линейно-упругого изотропного материала и малых изменений температуры (линеаризованная термоупругость). Обобщение на конечные деформации, анизотропные материалы и нелинейную теплопроводность требует дополнительных исследований.

Практические приложения. Разработанная постановка применима при проектировании: лопаток турбин и ракетных двигателей (высокоинтенсивный нагрев); теплозащитных экранов космических аппаратов (ударные тепловые потоки); электронных компонентов с лазерным и электронно-лучевым нагревом; медицинских имплантов при криохирургическом воздействии.

5. Заключение

В работе получены следующие основные результаты, составляющие её научную новизну:

1. Выведены уравнения движения нестационарной связанной термоупругой среды, записанные непосредственно в компонентах тензора напряжений в произвольной криволинейной ортогональной системе координат с учётом конечной скорости тепловых потоков (уравнение (7)). Данная формулировка представлена в литературе впервые.
2. Введён термически скорректированный тензор напряжений $\sigma^{*i}{}_j$ (уравнение (5)), обеспечивающий симметричную компактную запись системы при произвольном времени релаксации τ_t.
3. Получено уравнение баланса термомеханической энергии через тензор напряжений в криволинейных координатах при гиперболическом законе теплопереноса (уравнение (6)).
4. Установлена полная иерархия частных случаев: при $\tau_t \to 0$ и в декартовых координатах система переходит в динамические уравнения Новацкого; в статическом пределе — в классические уравнения Бельтрами–Митчелла.

Перспективы исследования: численное решение системы (7) методом конечных элементов для конкретных тел в цилиндрических и сферических координатах; аналитическое решение для ряда канонических задач; обобщение на анизотропные материалы.

Список литературы

1. Beltrami E. Sull'interpretazione meccanica delle formule di Maxwell // Mem. R. Accad. Sci. Ist. Bologna. 1892. Ser. 5. Vol. 1. P. 365–375.
2. Nowacki W. On the treatment of the two-dimensional coupled thermoelastic problems in terms of stresses // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Techn. 1961. Vol. 9. No. 3.
3. Cattaneo C. Sur une forme de l'équation de la chaleur éliminant le paradoxe d'une propagation instantanée // C. R. Acad. Sci. 1958. Vol. 247. P. 431–433.
4. Vernotte P. Les paradoxes de la théorie continue de l'équation de la chaleur // C. R. Acad. Sci. 1958. Vol. 246. P. 3154–3155.
5. Lord H.W., Shulman Y. A generalized dynamical theory of thermoelasticity // J. Mech. Phys. Solids. 1967. Vol. 15. P. 299–309.
6. Земсков А.В., Салиев А.А., Тарлаковский Д.В. Постановка задачи термоупругости в напряжениях // Тезисы докладов XXXI Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред». Т. 2. С. 125–127.
7. Вестяк В.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Математические основы термоупругости: Учебное пособие. М.: Изд-во МАИ, 2021. 92 с.
8. Ignaczak J., Ostoja-Starzewski M. Thermoelasticity with Finite Wave Speeds. Oxford: Oxford University Press, 2010. 414 p.