ISSN:3030-332X
Impact factor: 9,493
International journal of scientific researchers

OPTIMALLASHTIRISH NAZARIYASI VA LAGRANGE KO‘PAYTIRUVCHILARI USULINING IQTISODIY MASALALARDAGI QO‘LLANILISHI

Ismatov O`tkir Rustamovich
Samarqand iqtisodiyot va servis Insituti katta o`qituvchisi.

R.Ismoilova
Sanarqand iqtisodiyot va sevis insituti talabasi
https://doi.org/10.5281/zenodo.20035656

Annotatsiya (o‘zbek tilida):
Ushbu maqolada optimallashtirish nazariyasining nazariy asoslari va uning iqtisodiy jarayonlarni tahlil qilishdagi o‘rni ilmiy jihatdan yoritiladi. Xususan, ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalarni cheklovlar ostida optimallashtirish masalalarini yechishda Lagrange ko‘paytiruvchilari usulining matematik mohiyati va qo‘llanish mexanizmlari tahlil qilinadi. Tadqiqot davomida iqtisodiy modellar, jumladan foydani maksimal darajaga yetkazish, xarajatlarni minimallashtirish hamda resurslardan samarali foydalanish masalalari matematik modellashtirish orqali o‘rganiladi.

Maqolada Lagrange funksiyasi yordamida shartli ekstremumlarni aniqlash usullari ko‘rib chiqilib, ularning iqtisodiy talqini izohlanadi. Shuningdek, mazkur usulning ishlab chiqarish nazariyasi, iste’molchi tanlovi va muvozanat masalalaridagi amaliy ahamiyati ochib beriladi. Tadqiqot natijalari optimallashtirish nazariyasining iqtisodiyotdagi murakkab jarayonlarni tahlil qilish va samarali qarorlar qabul qilishdagi muhim vosita ekanligini ko‘rsatadi.

Аннотация (rus tilida):
В данной статье рассматриваются теоретические основы теории оптимизации и её роль в анализе экономических процессов. Особое внимание уделяется методу множителей Лагранжа как эффективному инструменту решения задач условной оптимизации функций нескольких переменных. В ходе исследования анализируется математическая сущность метода Лагранжа и механизмы его применения в экономическом моделировании.

В статье исследуются задачи максимизации прибыли, минимизации затрат и оптимального распределения ограниченных ресурсов с использованием математических моделей. Также рассматриваются методы нахождения условных экстремумов с помощью функции Лагранжа и даётся их экономическая интерпретация. Практическое значение данного подхода раскрывается на примере теории производства, поведения потребителей и задач экономического равновесия. Результаты исследования подтверждают, что теория оптимизации и метод множителей Лагранжа являются важными инструментами для анализа сложных экономических систем и принятия эффективных управленческих решений.

Kirish

Zamonaviy iqtisodiy tizimlarning murakkablashuvi, resurslarning cheklanganligi hamda inson ehtiyojlarining doimiy ravishda ortib borishi iqtisodiy subyektlar oldiga optimal qarorlar qabul qilish zaruratini qo‘ymoqda. Bozor iqtisodiyoti sharoitida har bir xo‘jalik yurituvchi subyekt — korxona, firma yoki iste’molchi — o‘z faoliyatida maksimal samaradorlikka erishishga intiladi. Bu esa o‘z navbatida matematik jihatdan optimallashtirish masalalarini hal etishni talab qiladi. Shu sababli optimallashtirish nazariyasi nafaqat oliy matematikaning muhim yo‘nalishlaridan biri, balki iqtisodiy tahlilning ajralmas metodologik asosi sifatida namoyon bo‘ladi.

Optimallashtirish nazariyasi iqtisodiy jarayonlarni miqdoriy jihatdan ifodalash, turli alternativ qarorlar orasidan eng maqbulini tanlash hamda resurslardan samarali foydalanishni ta’minlash imkonini beradi. Xususan, ishlab chiqarish hajmini maksimal darajaga yetkazish, foydani oshirish, xarajatlarni kamaytirish kabi masalalar matematik model ko‘rinishida ifodalanadi va ularni yechishda zamonaviy

matematik usullar keng qo‘llaniladi. Shu nuqtai nazardan, ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalarni cheklovlar ostida optimallashtirish muammosi alohida ilmiy ahamiyat kasb etadi.

Mazkur muammoni hal etishda eng samarali usullardan biri sifatida Lagrange ko‘paytiruvchilari usuli e’tirof etiladi. Ushbu usul yordamida bir nechta o‘zgaruvchili funksiyaning maksimum yoki minimum qiymatini aniqlash, ayniqsa, turli iqtisodiy cheklovlar (masalan, budjet, resurs yoki texnologik cheklovlar) mavjud bo‘lgan sharoitda muhim ahamiyat kasb etadi. Lagrange usuli nafaqat matematik jihatdan mukammal nazariyaga ega, balki amaliy jihatdan ham iqtisodiy modellashtirishda keng qo‘llaniladi.

Iqtisodiyot fanida ushbu usulning qo‘llanilishi ishlab chiqarish nazariyasi, iste’molchi tanlovi nazariyasi, umumiy iqtisodiy muvozanat va resurslarni optimal taqsimlash kabi muhim yo‘nalishlarda yaqqol namoyon bo‘ladi. Masalan, korxona o‘z foydasini maksimal qilishga intilgan holda mavjud resurslardan qanday foydalanishi kerakligi yoki iste’molchi o‘z budjeti doirasida maksimal foydalilikka qanday erishishi mumkinligi aynan optimallashtirish masalalari orqali aniqlanadi.

Mazkur maqolaning asosiy maqsadi optimallashtirish nazariyasining nazariy asoslarini chuqur o‘rganish, Lagrange ko‘paytiruvchilari usulining matematik mohiyatini ochib berish hamda uning iqtisodiy masalalarni yechishdagi amaliy ahamiyatini ilmiy jihatdan asoslashdan iboratdir. Shuningdek, tadqiqot davomida matematik modellar yordamida iqtisodiy jarayonlarni tahlil qilishning samaradorligi ko‘rsatib beriladi.

Tadqiqotning vazifalari sifatida quyidagilar belgilangan:

- optimallashtirish nazariyasining asosiy tushunchalarini tahlil qilish;
- cheklovli optimallashtirish masalalarining matematik modelini o‘rganish;
- Lagrange ko‘paytiruvchilari usulining nazariy asoslarini ochib berish;
- mazkur usulning iqtisodiy jarayonlardagi qo‘llanilishini misollar asosida ko‘rsatish.

Shu bilan birga, maqolada nazariy tahlil bilan bir qatorda analitik va grafik usullar ham qo‘llanilib, olingan natijalarning iqtisodiy mazmuni izohlanadi. Bu esa tadqiqotning ilmiy va amaliy ahamiyatini yanada oshiradi.

Asosiy qism:

Optimallashtirish (matematika, informatika va operatsiyalarni o'rganishda) — chiziqli va/yoki chiziqli bo'lmagan tengliklar yoki tengsizliklar to'plami bilan chegaralangan cheklangan o'lchovli vektor makonining ma'lum bir mintaqasida maqsad funktsiyasining ekstremumini (minimal yoki maksimal) topish vazifasi.

Optimallashtirish nazariyasi — bu ma’lum bir maqsad funksiyasining eng katta yoki eng kichik qiymatini aniqlash bilan bog‘liq matematik usullar majmuasidir. Iqtisodiy jarayonlarda bu odatda foydani maksimal qilish yoki xarajatlarni minimallashtirish shaklida namoyon bo‘ladi.

Umumiy holda optimallashtirish masalasi quyidagicha ifodalanadi: maqsad funksiyasini ekstremumga keltirish

f(x,y)→max yoki min)

bunda x va y — boshqariluvchi o‘zgaruvchilar hisoblanadi.

Agar masala cheklovlarsiz bo‘lsa, ekstremum topish uchun birinchi tartibli hosilalar nolga tenglashtiriladi. Ammo iqtisodiy masalalarning aksariyati cheklovlar mavjud bo‘lgan sharoitda qaraladi. Shu sababli shartli optimallashtirish masalalari alohida ahamiyat kasb etadi.

Cheklovlar mavjud bo‘lgan sharoitda optimallashtirish masalalarini yechishda Lagrange ko‘paytiruvchilari usuli keng qo‘llaniladi. Ushbu usulning mohiyati shundan iboratki, maqsad funksiyasi va cheklov yagona funksiyaga birlashtiriladi va natijada murakkab masala soddalashtirilgan ko‘rinishda yechiladi. Bu yondashuv orqali shartli ekstremumlarni aniqlash, ya’ni berilgan shartlar asosida funksiyaning eng katta yoki eng kichik qiymatini topish mumkin bo‘ladi. Lagrange ko‘paytiruvchisi esa iqtisodiy talqinda muhim ahamiyat kasb etib, u resurslarning qo‘shimcha birligi maqsad funksiyasiga qanday ta’sir ko‘rsatishini ifodalaydi. Shu jihatdan u “soya narxi” sifatida ham talqin etiladi.

Mazkur usul iqtisodiyotning turli sohalarida keng qo‘llaniladi. Xususan, ishlab chiqarish nazariyasida korxona o‘z foydasini maksimal darajaga yetkazishga intiladi. Bunda daromad va xarajat funksiyalari o‘zaro bog‘liq holda qaraladi va mavjud resurslar doirasida optimal ishlab chiqarish hajmi

aniqlanadi. Lagrange usuli yordamida korxona qaysi resurslardan qay darajada foydalanishi kerakligi ilmiy asosda belgilanadi. Natijada ishlab chiqarish samaradorligini oshirish imkoniyati yuzaga keladi.

Bundan tashqari, xarajatlarni minimallashtirish masalalari ham muhim o‘rin tutadi. Korxona ma’lum hajmdagi mahsulotni ishlab chiqarishda minimal xarajatga erishishga harakat qiladi. Bu jarayonda ishlab chiqarish funksiyasi va resurslar narxi hisobga olinadi. Optimallashtirish natijasida resurslar shunday taqsimlanadiki, umumiy xarajat eng kichik qiymatga ega bo‘ladi. Bu esa iqtisodiy samaradorlikni oshirishga xizmat qiladi.

Lagrange ko‘paytiruvchilari usulining nazariy mohiyati

Cheklovli optimallashtirish masalalarini yechishda Lagrange ko‘paytiruvchilari usuli keng qo‘llaniladi. Ushbu usul yordamida maqsad funksiyasi va cheklov yagona funksiyaga birlashtiriladi.

L(x,y,λ)=f(x,y)+λ (g(x,y)−c)\mathcal{L}(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\,(g(x,y)-c)L(x,y,λ)=f(x,y)+λ(g(x,y)−c)

Bu yerda:

- f(x,y)f(x,y)f(x,y) — maqsad funksiyasi
- g(x,y)=cg(x,y)=cg(x,y)=c — cheklov tenglamasi
- λ\lambdaλ — Lagrange ko‘paytiruvchisi

Ekstremum quyidagi shartlar asosida aniqlanadi:

∂L∂x=0,∂L∂y=0,∂L∂λ=0\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}=0∂x∂L =0,∂y∂L =0,∂λ∂L =0

Mazkur tenglamalar tizimi orqali optimal nuqtalar aniqlanadi. Lagrange ko‘paytiruvchisi iqtisodiy talqinda “soya narxi” sifatida qaraladi, ya’ni resurs bir birlikka oshganda maqsad funksiyasining qanday o‘zgarishini ko‘rsatadi.

Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalarni optimallashtirish masalalari oliy matematikaning muhim yo‘nalishlaridan biri bo‘lib, ayniqsa, cheklovlar mavjud bo‘lgan hollarda ularni yechish alohida metodologik yondashuvni talab etadi. Amaliy masalalarda, xususan iqtisodiyotda, maqsad funksiyasi ko‘pincha turli tenglama yoki tengsizliklar orqali ifodalangan cheklovlar ostida qaraladi. Bunday sharoitda shartli ekstremumlarni aniqlash uchun eng samarali usullardan biri sifatida Lagrange ko‘paytiruvchilari usuli qo‘llaniladi.

Mazkur usulning asosiy g‘oyasi shundan iboratki, cheklovli optimallashtirish masalasi maxsus yordamchi funksiya — Lagrange funksiyasi yordamida cheklovsiz optimallashtirish masalasiga keltiriladi. Bunda maqsad funksiyasi va cheklov o‘zaro bog‘langan holda yagona funksiyaga birlashtiriladi. Natijada, murakkab ko‘rinishdagi masala soddaroq matematik tizim orqali ifodalanadi va uning yechimi differensial hisoblash usullari yordamida aniqlanadi.

L(x1,…,xn,λ)=f(x1,…,xn)+λ (g(x1,…,xn)−c)\mathcal{L}(x_1,\dots,x_n,\lambda)=f(x_1,\dots,x_n) +\lambda\,(g(x_1,\dots,x_n)-c)L(x1 ,…,xn ,λ)=f(x1 ,…,xn)+λ(g(x1 ,…,xn)−c)

Bu yerda f(x1,…,xn)f(x_1, \dots, x_n)f(x1 ,…,xn) — optimallashtirilayotgan maqsad funksiyasi, g(x1,…,xn)=cg(x_1, \dots, x_n)=cg(x1 ,…,xn)=c — cheklov tenglamasi, λ\lambdaλ esa Lagrange ko‘paytiruvchisi hisoblanadi. Ushbu ko‘paytiruvchi yordamchi parametr bo‘lib, u optimallashtirish jarayonida cheklovning ta’sirini hisobga olish imkonini beradi.

Nazariy jihatdan, agar funksiya va cheklovlar yetarlicha silliq bo‘lsa, shartli ekstremum nuqtasida maqsad funksiyaning gradienti cheklov funksiyaning gradientiga proportsional bo‘ladi. Boshqacha aytganda, optimal nuqtada quyidagi geometrik shart bajariladi: maqsad funksiyaning o‘sish yo‘nalishi cheklov yuzasining urinma tekisligiga tik bo‘ladi. Bu esa ekstremum nuqtada ikki gradientning chiziqli bog‘liqligini anglatadi. Matematik ifodada bu holat shunday talqin qilinadi: ekstremum nuqtada Lagrange funksiyaning barcha o‘zgaruvchilar bo‘yicha xususiy hosilalari nolga teng bo‘ladi. Natijada tenglamalar tizimi hosil bo‘ladi va uning yechimi optimal qiymatlarni beradi. Ushbu tizimni yechish orqali nafaqat o‘zgaruvchilarning optimal qiymatlari, balki Lagrange ko‘paytiruvchisining qiymati ham aniqlanadi.

Lagrange ko‘paytiruvchisining iqtisodiy talqini alohida e’tiborga loyiqdir. U ko‘pincha “soya narxi” sifatida izohlanadi, ya’ni cheklovdagi resurs miqdori bir birlikka o‘zgarganda maqsad funksiyaning

qanday o‘zgarishini ko‘rsatadi. Bu esa iqtisodiy qarorlar qabul qilishda muhim ahamiyatga ega bo‘lib, resurslarning qiymatini baholash imkonini beradi.

Optimallashtirish nazariyasi iqtisodiyotda turli muhim masalalarni hal etishda qo‘llaniladi. Quyida asosiy yo‘nalishlar ko‘rib chiqiladi.

3.1. Foydani maksimal qilish

Korxona foydasi quyidagicha ifodalanadi:

Π=R(x,y)−C(x,y)\Pi = R(x,y) - C(x,y)Π=R(x,y)−C(x,y)

bunda RRR — daromad, CCC — xarajat.

Cheklov mavjud bo‘lganda (masalan, resurs cheklangan), Lagrange usuli yordamida optimal ishlab chiqarish hajmi aniqlanadi. Bu korxonaga maksimal foyda keltiruvchi strategiyani tanlash imkonini beradi.

Xarajatlarni minimallashtirish

Korxona berilgan ishlab chiqarish hajmini minimal xarajat bilan amalga oshirishga intiladi. Bu quyidagi masala sifatida qaraladi:

$$C(x,y) \rightarrow \min \text{ sharti bilan } Q(x,y)=Q0$$

Bu yerda Q(x,y)— ishlab chiqarish funksiyasi.

Natijada optimal resurs taqsimoti aniqlanadi.

Iste’molchi tanlovi modeli

Iste’molchi o‘z budjeti doirasida maksimal foydalilikka erishishga harakat qiladi. Bu quyidagicha ifodalanadi:

$$U(x,y) \rightarrow \max \text{ sharti bilan } p_x x + p y_y = I$$

bu yerda:

- U(x,y)— foydalilik funksiyasi
- P
- x,Py — narxlar
- III — daromad

Lagrange usuli yordamida optimal iste’mol savati aniqlanadi.

Grafik tahlil va iqtisodiy interpretatsiya

Grafik jihatdan optimallashtirish masalalari izokvanta va byudjet chizig‘i yordamida tasvirlanadi. Optimal nuqta — bu izokvanta bilan cheklov chizig‘ining urinma bo‘lgan nuqtasidir. Bu nuqtada chegaraviy almashtirish normasi narxlar nisbatiga teng bo‘ladi.

Matematik jihatdan bu quyidagicha ifodalanadi:

$$\frac{MUx}{MUy} = \frac{Px}{Py}$$

Bu tenglik iqtisodiy muvozanat shartini ifodalaydi.

Yuqoridagi tahlillar shuni ko‘rsatadiki, optimallashtirish nazariyasi va Lagrange ko‘paytiruvchilari usuli iqtisodiy jarayonlarni chuqur va aniq tahlil qilish imkonini beradi. Ushbu yondashuv yordamida resurslardan samarali foydalanish, ishlab chiqarish samaradorligini oshirish va iqtisodiy qarorlarni ilmiy asosda qabul qilish mumkin.

XULOSA

Mazkur maqolada optimallashtirish nazariyasi va Lagrange ko‘paytiruvchilari usulining nazariy hamda amaliy jihatlari chuqur tahlil qilindi. Tadqiqot davomida oliy matematikaning ushbu muhim yo‘nalishi iqtisodiy jarayonlarni modellashtirish va tahlil qilishda qanchalik muhim ahamiyatga ega ekanligi asoslab berildi. Xususan, resurslar cheklangan sharoitda optimal qaror qabul qilish masalalari matematik yondashuv orqali samarali yechilishi ko‘rsatildi.

Optimallashtirish nazariyasi iqtisodiy subyektlar faoliyatida eng muhim masalalardan biri bo‘lgan foydani maksimal qilish, xarajatlarni minimallashtirish hamda resurslarni optimal taqsimlash kabi muammolarni hal etishda asosiy metodologik vosita sifatida qaraladi. Bu nazariya yordamida iqtisodiy jarayonlar aniq matematik model ko‘rinishida ifodalanadi va ularning yechimlari ilmiy asosda topiladi.

Lagrange ko‘paytiruvchilari usuli esa cheklovli optimallashtirish masalalarini yechishda eng samarali va universal usullardan biri ekanligi bilan ajralib turadi. Ushbu usulning mohiyati maqsad

funksiyasi va cheklovni yagona matematik ifodaga birlashtirish orqali murakkab masalani soddalashtirishdan iboratdir. Natijada ekstremum nuqtalarni aniqlash jarayoni ancha qulaylashadi hamda aniq analitik yechim olish imkoniyati paydo bo‘ladi. Iqtisodiy talqinda Lagrange ko‘paytiruvchilari muhim mazmunga ega bo‘lib, ular resurslarning qo‘shimcha birligi maqsad funksiyasiga qanday ta’sir qilishini ifodalaydi. Bu ko‘rsatkich “soya narxi” sifatida talqin qilinib, iqtisodiy qarorlar qabul qilishda muhim ahamiyat kasb etadi. Shu orqali korxonalar va iqtisodiy subyektlar resurslardan foydalanish samaradorligini baholash imkoniyatiga ega bo‘ladi.

Shuningdek, maqolada optimallashtirish nazariyasining ishlab chiqarish, iste’molchi tanlovi hamda iqtisodiy muvozanat modellaridagi qo‘llanilishi ham yoritildi. Ushbu yondashuvlar iqtisodiy tizimlarni chuqur tahlil qilish, samarali strategiyalar ishlab chiqish va optimal qarorlar qabul qilishda muhim ilmiy asos bo‘lib xizmat qiladi.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. Global optimalashtirishning bitta algortitmini statistik o`rganish Abakarob A.SH. Sushkov
2. Akulich I.L. matematik dasturlash misollar va muammolarda: darslik . iqtisodiyot talabalari uchun qo`llanma
3. Karmanov G. V matematik darturlash - jismoniy nashriyot - mat. Adabiyot, 2004 yil.
4. Korn G. Korn T. olimlar va muhandislar uchun matematik qo`llanma - M- Fan 1997-yil
5. Matematik dasturlashning mohiyati 2014-yil Orqaga qaytish mashinasi , matematik dasturlash lug`ati , hisoblash jamiyati
6. Du, D. Z .; Pardalos, P. M.; Vu, V. (2008). "Optimallashtirish tarixi". Yilda Floudas, S; Pardalos, P. (tahrir). Optimizatsiya ensiklopediyasi. Boston: Springer.
7. Dorfman, Robert (1969). "Optimal boshqaruv nazariyasining iqtisodiy talqini". *Amerika iqtisodiy sharhi*.