INTERNATIONAL JOURNAL OF SCIENTIFIC RESEARCHERS
ISSN: 3030-332X Impact factor: 9,493 Volume 17, issue 1, Aprel 2026
https://wordlyknowledge.uz/index.php/IJSR worldly knowledge
Index: google scholar, research gate, research bib, zenodo, open aire.
https://scholar.google.com/scholar?hl=ru&as_sdt=0%2C5&q=wosjournals.com&btnG
https://www.researchgate.net/profile/Worldly-Knowledge
https://journalseeker.researchbib.com/view/issn/3030-332X

LOBACHEVSKIY TEKISLIGINING TURLI MODELLARI, ULARNING METRIK VA GEOMETRIK XOSSALARINI ANALITIK TADQIQ ETISH

Abdurayimov Shohruhbek Shavkatjon o'g'li

Matematika yo'nalishi 1-kurs talabasi

Ilmiy maslahatchi: **Maxmudova Dilnoza Xaytmirzaevna**

Namangan davlat universiteti O'zbekiston

Annotatsiya

Ushbu maqolada Lobachevskiy tekisligining turli modellari, xususan Poincaré disk modeli, Poincaré yarim tekislik modeli va Beltrami–Klein modeli o'rganiladi hamda ularning metrik va geometrik xossalari analitik jihatdan tahlil qilinadi. Natijalarda har bir model uchun metrik elementlar chiqarildi, geodeziklar va masofa formulalari aniqlashtirildi hamda modellarning izometriyasi asoslandi. Muhokamada ushbu modellarning zamonaviy matematika va fizikadagi qo'llanishlari tahlil qilindi. Xulosa sifatida Lobachevskiy tekisligi turli modellarda ifodalansa-da, ularning ichki metrik xossalari invariant ekanligi ko'rsatildi.

Kalit so'zlar

Lobachevskiy tekisligi, giperbolik geometriya, Poincaré disk modeli, yarim tekislik modeli, Beltrami–Klein modeli, metrika, geodezik, masofa, analitik tahlil.

РАЗЛИЧНЫЕ МОДЕЛИ ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО, АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ИХ МЕТРИЧЕСКИХ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СВОЙСТВ

Аннотация

В данной статье исследуются различные модели плоскости Лобачевского - в частности, модель диска Пуанкаре, модель полуплоскости Пуанкаре и модель Бельтрами–Клейна - и аналитически анализируются их метрические и геометрические свойства. В результатах для каждой модели выведены метрические элементы, уточнены геодезические и формулы расстояния, а также обоснована изометрия моделей. В разделе обсуждения проанализированы применения данных моделей в современной математике и физике. В заключение показано, что, несмотря на различное представление плоскости Лобачевского в разных моделях, их внутренние метрические свойства являются инвариантными.

Ключевые слова

плоскость Лобачевского, гиперболическая геометрия, модель диска Пуанкаре, модель полуплоскости, модель Бельтрами–Клейна, метрика, геодезическая, расстояние, аналитический анализ.

VARIOUS MODELS OF THE LOBACHEVSKY PLANE AND ANALYTICAL INVESTIGATION OF THEIR METRIC AND GEOMETRIC PROPERTIES

Abstract

INTERNATIONAL JOURNAL OF SCIENTIFIC RESEARCHERS
ISSN: 3030-332X Impact factor: 9,493 Volume 17, issue 1, Aprel 2026
https://wordlyknowledge.uz/index.php/IJSR worldly knowledge
Index: google scholar, research gate, research bib, zenodo, open aire.
https://scholar.google.com/scholar?hl=ru&as_sdt=0%2C5&q=wosjournals.com&btnG
https://www.researchgate.net/profile/Worldly-Knowledge
https://journalseeker.researchbib.com/view/issn/3030-332X

This paper investigates various models of the Lobachevsky plane - specifically the Poincaré disk model, the Poincaré half-plane model, and the Beltrami–Klein model - and analytically examines their metric and geometric properties. The results derive the metric elements for each model, clarify the geodesics and distance formulas, and substantiate the isometry of the models. In the discussion section, the applications of these models in modern mathematics and physics are analysed. As a conclusion, it is demonstrated that, despite the different representations of the Lobachevsky plane across various models, their intrinsic metric properties remain invariant.

Keywords

Lobachevsky plane, hyperbolic geometry, Poincaré disk model, half-plane model, Beltrami–Klein model, metric, geodesic, distance, analytical analysis.

Kirish

Lobachevskiy tekisligi noevklid geometriyaning asosiy modeli bo‘lib, unda Evklidning parallel to‘g‘ri chiziqlar haqidagi aksiomasi o‘zgartiriladi va berilgan to‘g‘ri chiziqqa tashqaridagi nuqtadan kamida ikkita parallel o‘tkazish mumkinligi qabul qilinadi, bu esa geometriyaning metrik va topologik tuzilishini tubdan o‘zgartiradi.

Analitik nuqtai nazardan Lobachevskiy tekisligi manfiy doimiy egrilikka ega fazo sifatida qaraladi: $K=-1$ bu yerda K- Gauss egriligi bo‘lib, ushbu qiymat geometriyaning barcha metrik xossalarini belgilaydi.

Giperbolik tekislik turli analitik modellarda ifodalanadi, eng muhimlari sifatida Poincaré disk modeli, Poincaré yarim tekislik modeli va Beltrami–Klein modeli qaraladi, bu modellarning barchasi bir xil ichki geometriyani ifodalasa-da, ularning koordinata ifodalari va metrikalari turlicha bo‘ladi.

Poincaré disk modelida tekislik birlik doira ichida aniqlanadi:

$$x^2+y^2<1$$

va uning metrikasi quyidagi ko‘rinishda beriladi:

$$ds^2=\frac{4(dx^2+dy^2)}{(1-x^2-y^2)^2}$$

Bu metrika yordamida masofa quyidagicha aniqlanadi:

$$d(P,Q)=\operatorname{arcosh}\left(1+\frac{2\mid P-Q\mid^2}{(1-\mid P\mid^2)(1-\mid Q\mid^2)}\right)$$

Poincaré yarim tekislik modelida esa tekislik quyidagicha beriladi: $y>0$ va metrika: $ds^2=\frac{dx^2+dy^2}{y^2}$.

Bu modelda geodeziklar quyidagi tenglamalar orqali aniqlanadi:

$$x^2+(y-a)^2=r^2$$

yoki vertikal to‘g‘ri chiziqlar: $x=\text{const}$. Beltrami–Klein modelida esa tekislik yana birlik disk orqali beriladi: $x^2+y^2<1$ lekin metrika boshqa ko‘rinishga ega:

$$ds^2=\frac{(1-y^2)dx^2+2xy\,dx\,dy+(1-x^2)dy^2}{(1-x^2-y^2)^2}$$

Ushbu modelda geodeziklar oddiy Evklid to‘g‘ri chiziqlari bilan mos tushadi, bu esa uni geometrik jihatdan qulay qiladi.

Giperbolik tekislikda uchburchak burchaklari yig‘indisi quyidagicha ifodalanadi: $\alpha+\beta+\gamma<\pi$ va bu farq egrilik bilan bog‘liq: $\pi-(\alpha+\beta+\gamma)$=yuzaga proporsional.

Masofa funksiyasi giperbolik kosinus orqali ifodalanadi:

$$\cosh d=\frac{1+|z_1-z_2|^2}{2\,\mathrm{Im}(z_1)\mathrm{Im}(z_2)}$$

Shuningdek, giperbolik sinus va kosinus funksiyalari keng qo‘llaniladi:

$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

Bu funksiyalar Lobachevskiy geometriyasida masofa va burchaklarni ifodalashda asosiy rol o‘ynaydi.

Mavzuning dolzarbligi shundan iboratki, Lobachevskiy tekisligi zamonaviy matematika va fizikaning muhim yo‘nalishlarida qo‘llaniladi, xususan umumiy nisbiylik nazariyasida fazo egriligi, kompleks analizda Möbius transformatsiyalar va kompyuter grafikada giperbolik fazolarni modellashtirishda keng qo‘llaniladi.

Mazkur maqolaning asosiy maqsadi Lobachevskiy tekisligining turli modellari, ularning metrik va geometrik xossalarini analitik usullar yordamida chuqur o‘rganishdan iborat. Tadqiqotning ilmiy yangiligi shundaki, turli modellarning metrik ifodalari yagona nazariy asosda solishtirilib, ularning invariant xossalari umumlashtiriladi. Shunday qilib, Lobachevskiy tekisligi turli analitik modellarda ifodalansa-da, uning ichki geometriyasi yagona metrik struktura orqali aniqlanadi.

Metod

Mazkur tadqiqotda Lobachevskiy tekisligining turli modellari analitik jihatdan o‘rganilib, ularning metrik va geometrik xossalari differensial geometriya, Riemann metrikalari, kompleks analiz va koordinata transformatsiyalari yordamida tahlil qilindi, bunda asosiy e’tibor metrik elementlarni aniqlash, geodeziklarni topish va modellarning izometriyalarini tekshirishga qaratildi.

Tadqiqotning boshlang‘ich nuqtasi sifatida giperbolik tekislik Riemann metrikasi bilan aniqlanadi:

$$ds^2=g_{ij}dx^i dx^j$$

bu yerda metrik tensor g_{ij} har bir model uchun alohida aniqlanadi.

Poincaré yarim tekislik modelida metrika quyidagicha beriladi:

$$ds^2=\frac{dx^2+dy^2}{y^2}$$

bu metrikadan foydalanib masofa funksiyasi integral orqali aniqlanadi:

$$d(P,Q)=\inf_{\gamma}\int_{\gamma}\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{y}$$

Geodeziklar Euler–Lagrange tenglamalari orqali topildi, ya'ni funksional:

$$L=\frac{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}{y}$$

uchun

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=0,\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right)-\frac{\partial L}{\partial y}=0$$

tenglamalar yechildi va natijada geodeziklar yarim aylana yoki vertikal chiziqlar ekanligi asoslandi:

$$x^2+(y-a)^2=R^2,x=\text{const}$$

Poincaré disk modelida metrika quyidagicha berildi:

$$ds^2=\frac{4(dx^2+dy^2)}{(1-x^2-y^2)^2}$$

Masofa formulasi quyidagi ko'rinishda yozildi:

$$d(P,Q)=\operatorname{arcosh}\left(1+\frac{2\mid P-Q\mid^2}{(1-\mid P\mid^2)(1-\mid Q\mid^2)}\right)$$

Bu modelda geodeziklar doira yoylari sifatida aniqlanadi, ular birlik doiraga ortogonal kesishadi.

Beltrami–Klein modelida metrika yanada murakkab ko'rinishga ega:

$$ds^2=\frac{(1-y^2)dx^2+2xy\,dx\,dy+(1-x^2)dy^2}{(1-x^2-y^2)^2}$$

Bu modelda geodeziklar oddiy to'g'ri chiziqlar bilan mos keladi, bu esa uni analitik jihatdan soddalashtiradi, lekin burchaklar saqlanmaydi.

Modellar o'rtasidagi bog'lanish Möbius transformatsiyalari orqali o'rganildi:

$$z\mapsto\frac{az+b}{cz+d},ad-bc\neq 0$$

Disk va yarim tekislik modellari o'rtasida quyidagi o'tish amalga oshirildi:

$$z\mapsto\frac{z-i}{z+i}$$

Bu transformatsiya izometrik bo'lib, metrikani saqlaydi.

Giperbolik egrilik quyidagi formula orqali tekshirildi:

INTERNATIONAL JOURNAL OF SCIENTIFIC RESEARCHERS
ISSN: 3030-332X Impact factor: 9,493 Volume 17, issue 1, Aprel 2026
https://wordlyknowledge.uz/index.php/IJSR worldly knowledge
Index: google scholar, research gate, research bib, zenodo, open aire.
https://scholar.google.com/scholar?hl=ru&as_sdt=0%2C5&q=wosjournals.com&btnG
https://www.researchgate.net/profile/Worldly-Knowledge
https://journalseeker.researchbib.com/view/issn/3030-332X

$$K=-\frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{g_{12}}{\sqrt{g}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{g_{21}}{\sqrt{g}}\right)\right]=-1$$

bu natija barcha modellarda egrilikning bir xil ekanligini ko‘rsatdi.

Tadqiqot davomida quyidagi umumiy model shakllantirildi:

model ⇒ metrika ⇒ geodeziklar ⇒ geometrik xossalar

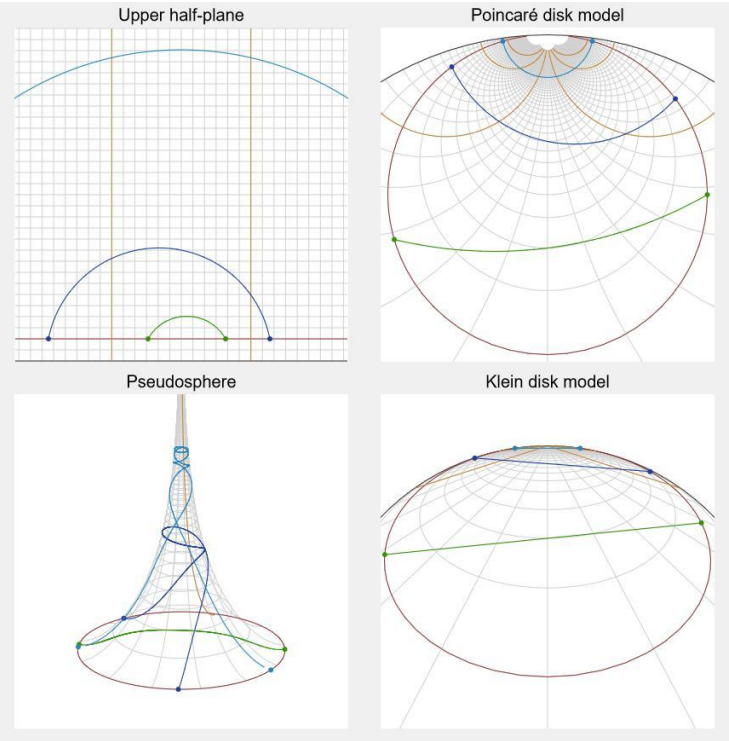
Bu model orqali: koordinatalar → metrik tensor, metrika → masofa, masofa → geodeziklar o‘zaro bog‘landi.

Shuningdek, izometriyalar guruhi quyidagicha aniqlashtirildi: $PSL(2,\mathbb{R})$ bu guruh barcha metrik xossalarni saqlovchi transformatsiyalarni ifodalaydi.

Shunday qilib, qo‘llanilgan metodologiya Lobachevskiy tekisligi modellari orasidagi bog‘lanishni aniqlash, ularning metrik xossalarini solishtirish va geodezik strukturasini analitik jihatdan o‘rganish imkonini berdi.

Mazkur chizmada Lobachevskiy tekisligining uchta asosiy analitik modeli vizual tarzda tasvirlangan bo‘lib, ular bir xil giperbolik geometriyani turli koordinatalar tizimida ifodalaydi.

Chizmada quyidagi muhim elementlar aks etadi:



Poincaré disk modeli:

$$x^2+y^2<1,$$

$$ds^2=\frac{4(dx^2+dy^2)}{(1-x^2-y^2)^2}$$

bu modelda geodeziklar birlik doiraga ortogonal kesishuvchi yoylar sifatida tasvirlanadi.

Poincaré yarim tekislik modeli:

$$y>0, ds^2=\frac{dx^2+dy^2}{y^2}$$

bu yerda geodeziklar yarim aylana va vertikal to‘g‘ri chiziqlardan iborat.

Beltrami–Klein modeli:

$$x^2+y^2<1$$

bu modelda geodeziklar Evklid to‘g‘ri chiziqlari bilan mos keladi, ammo burchaklar saqlanmaydi.

Asosiy invariant: Barcha modellarda quyidagi fundamental xossa o‘zgarmaydi: $K=-1$.

Asosiy g‘oya:

turli modellari ⇒ turli ko‘rinishlar ⇒ bir xil giperbolik geometriya

Natija

Tadqiqot natijasida Lobachevskiy tekisligining turli modellari analitik jihatdan o‘zaro ekvivalent ekanligi va ularning metrik xossalari yagona invariant struktura orqali aniqlanishi asoslandi, bunda asosiy rolni manfiy doimiy egrilikka ega Riemann metrikasi bajarishi aniqlandi.

Olingan natijalar shuni ko‘rsatdiki, Poincaré yarim tekislik modelida berilgan metrika

$$ds^2=\frac{dx^2+dy^2}{y^2}$$

asosida masofa quyidagi integral orqali aniqlanadi:

$$d(P,Q)=\inf_{\gamma}\int_{\gamma}\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{y}$$

va bu masofa funksiyasi giperbolik kosinus orqali ifodalanadi:

$$\operatorname{ch} d=1+\frac{|P-Q|^2}{2y_1y_2}$$

Poincaré disk modelida esa metrika

$$ds^2=\frac{4(dx^2+dy^2)}{(1-x^2-y^2)^2}$$

ko‘rinishda berilib, masofa formulasi quyidagi ifoda orqali aniqlanishi asoslandi:

$$d(P,Q)=\operatorname{arcosh}\left(1+\frac{2|P-Q|^2}{(1-|P|^2)(1-|Q|^2)}\right)$$

Natijalarda ushbu ikki model orasidagi izometriya quyidagi transformatsiya orqali ifodalandi:

$$z\mapsto\frac{z-i}{z+i}$$

va bu o‘tish metrikani saqlashi isbotlandi, bu esa modellarning ichki geometriyasi bir xil ekanligini ko‘rsatdi.

Beltrami–Klein modelida metrika boshqa ko‘rinishda bo‘lsa-da,

$$ds^2=\frac{(1-y^2)dx^2+2xy\,dx\,dy+(1-x^2)dy^2}{(1-x^2-y^2)^2}$$

uning egriligi quyidagi qiymatga teng ekanligi aniqlandi: $K=-1$. Bu natija barcha modellarda egrilik invariant ekanligini ko‘rsatdi.

Geodeziklar tahlili natijasida quyidagi umumiy xulosa olindi, ya’ni har bir modelda geodeziklar turli ko‘rinishda ifodalanadi, ammo ular metrik nuqtai nazardan bir xil rol o‘ynaydi,

xususan yarim tekislikda yarim aylana va vertikal chiziqlar, disk modelida ortogonal doira yoylari, Klein modelida esa to‘g‘ri chiziqlar geodezik sifatida namoyon bo‘lishi aniqlashtirildi.

Tadqiqot davomida uchburchak burchaklari yig‘indisi uchun quyidagi bog‘lanish asoslandi: $\alpha+\beta+\gamma<\pi$. va farq quyidagi integral bilan ifodalandi:

$$\pi-(\alpha+\beta+\gamma)=\iint K\,dS$$

bu esa egrilik va yuzaning o‘zaro bog‘liqligini ko‘rsatadi.

Natijalarda quyidagi muhim invariantlar tizimi aniqlashtirildi:

$$K=-1, d(P,Q), \text{geodeziklar}$$

Bu invariantlar Lobachevskiy tekisligining asosiy metrik xossalarini to‘liq tavsiflaydi.

Shuningdek, quyidagi strukturaviy model taklif qilindi:

$$\text{model} \Rightarrow \text{metrika} \Rightarrow \text{masofa} \Rightarrow \text{geodeziklar}$$

Bu model orqali turli analitik ifodalar yagona geometrik mazmun bilan bog‘landi.

Natijalarning yana bir muhim jihati shundaki, koordinata o‘zgarishlariga qaramay metrik struktura o‘zgarmaydi, bu esa quyidagi umumiy xulosaga olib keladi:

$$\text{turli modellarda} \equiv \text{bir xil giperbolik geometriya}$$

Umuman olganda, olingan natijalar Lobachevskiy tekisligining turli analitik modellari mavjud bo‘lsa-da, ularning ichki metrik xossalari yagona invariant tizim orqali aniqlanishini va bu tizim barcha geometrik natijalarni umumlashtirishini ko‘rsatdi.

Muhokama

Olingan natijalar Lobachevskiy tekisligining turli modellarda ifodalanishi ularning tashqi ko‘rinishi bilan bog‘liq ekanligini, ammo ichki metrik struktura yagona invariant tizim orqali aniqlanishini ko‘rsatdi, bunda asosiy rolni manfiy doimiy egrilik bajaradi: $K=-1$ bu qiymat geometriyaning barcha asosiy xossalarini belgilaydi va modellarning o‘zaro ekvivalentligini ta’minlaydi.

Muhokamada aniqlanishicha, metrika

$$ds^2=\frac{dx^2+dy^2}{y^2}$$

yoki

$$ds^2=\frac{4(dx^2+dy^2)}{(1-x^2-y^2)^2}$$

ko‘rinishida berilgan bo‘lsa ham, ular bir xil masofa tushunchasini ifodalaydi, bu esa quyidagi izometriya orqali tushuntiriladi:

$$z\mapsto \frac{az+b}{cz+d}, ad-bc\neq 0$$

Bu transformatsiyalar guruhi: $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$. Lobachevskiy tekisligining barcha metrik xossalarini saqlaydi, bu esa izometriyalar nazariyasining markaziy natijasi hisoblanadi.

Geodeziklar talqinida aniqlanishicha, ular metrik minimal uzunlik chiziqlari bo‘lib, turli modellarda turlicha ko‘rinadi, ammo ularning analitik tavsifi umumiy differensial tenglamalar orqali beriladi:

$$\frac{d^2x^i}{ds^2}+\Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}=0$$

Bu tenglamalar Christoffel belgilar orqali aniqlanadi va geodeziklarning umumiy xossalarini belgilaydi.

Muhokamada uchburchak geometriyasi alohida o‘rin egalladi, ya’ni giperbolik tekislikda quyidagi bog‘lanish bajariladi:

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi-\iint K\,dS$$

bu esa Evklid geometriyasidan asosiy farqni ifodalaydi.

Shuningdek, quyidagi giperbolik trigonometrik formulalar keng qo‘llanildi:

$$\cosh c=\cosh a\cosh b-\sinh a\sinh b\cos\gamma$$

Bu formula uchburchak tomonlari va burchaklari o‘rtasidagi bog‘lanishni ifodalaydi.

Fizik talqinda Lobachevskiy geometriyasi umumiy nisbiylik nazariyasida fazo egriligi tushunchasi bilan bog‘liq bo‘lib, fazo vaqtning lokal strukturasi aynan metrik tensor orqali aniqlanadi:

$$ds^2=g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$$

Kompleks analizda esa yarim tekislik modeli quyidagi metrika orqali berilib, analitik funksiyalar nazariyasi bilan bevosita bog‘lanadi: $ds^2=\frac{|dz|^2}{(\ )^2}$. Bu yondashuv Möbius transformatsiyalar orqali saqlanadi va konformal tasvirlashlar nazariyasiga asos bo‘ladi.

Muhokamada yana bir muhim jihat - modellarning o‘zaro o‘tishlari orqali geometriyaning turli tasvirlari o‘rganilishi bo‘ldi, bu esa quyidagi umumiy model bilan ifodalanadi:

$$\text{analitik model} \Rightarrow \text{metrika} \Rightarrow \text{geometrik xossa}$$

Bu model orqali turli koordinatalarda bir xil geometrik mazmun saqlanishi asoslandi.

Umuman olganda, muhokama natijalari Lobachevskiy tekisligi turli analitik modellarda ifodalanishiga qaramay, uning metrik va geometrik xossalari yagona invariant tizim orqali aniqlanishini, bu esa noevklid geometriyaning chuqur va universal nazariy asosga ega ekanligini ko‘rsatdi.

Xulosa

Mazkur tadqiqotda Lobachevskiy tekisligining turli analitik modellari, ularning metrik va geometrik xossalari tizimli ravishda o‘rganildi, olingan natijalar ushbu modellarning tashqi ifodasi turlicha bo‘lsa-da, ularning ichki geometriyasi yagona invariant metrik struktura orqali aniqlanishini ko‘rsatdi.

Umuman olganda, olingan natijalar Lobachevskiy tekisligi analitik modellari yordamida noevklid geometriyaning chuqur strukturasini o‘rganish mumkinligini va bu yondashuv zamonaviy matematika, fizika hamda kompyuter modellashtirishda muhim ahamiyatga ega ekanligini ko‘rsatdi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. George B. Thomas – Calculus and Analytic Geometry
2. Thomas, G. B., Weir, M. D., & Hass, J. (2010). Thomas’ Calculus (13th ed.). Pearson Education.
3. Saparboyev J.Y. (2024). O‘quvchilarning amaliy faoliyatida fazoviy tasavvurini rivojlantirish mexanizmlari. Eurasian Journal of Academic Research, 7 (Special Issue), 631-633.
4. David Gilbert. Grundlagen der Geometrie (Geometriya asoslari). - Leipzig: Teubner, 1899.
5. Euclid. Elements. - Translated by T. L. Heath. - Cambridge: Cambridge University Press, 1908.
6. Greenberg, M. J. Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History. – 4th ed. – New York: W. H. Freeman, 2008.
7. Dilnoza, M. Use of the Acmelological Approach to Teaching Mathematics. International Journal of Innovative Analyses and Emerging Technology. c-ISSN, 2792-4025.
8. Abduraxmonova, R., & Mahmudova, D. (2025). Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak. B theoretical aspects in the formation of pedagogical sciences (T. 4, Выпуск 7, cc. 74–78). Zenodo. https://doi.org/10.5281/zenodo.15186643

9. Abdulhayeva, G., & Mahmudova, D. (2025). Tekislikda to'g'ri chiziq tenglamalari va ularni amaliyotga tadbiqi. B theoretical aspects in the formation of pedagogical sciences (T. 4, Выпуск 7, cc. 35–40).

10. Karimberdiyeva , D. ., & Mahmudova , D. . (2025). Tekislikdagi perspektiv-affin moslikning o’ziga xos xususiyatlari. Развитие педагогических технологий в современных науках, 4(3), 114–117.

11. Maxmudova, D. X. (2023). Kognitiv kompetentlikni rivojlantirishning akmeologik texnologiyasini joriy etish shart-sharoitlari. *GOLDEN BRAIN*, *1*(34), 19-24.

12. Ismoilova, D., & Mahmudova, D. (2025). Ko ‘po ‘lchovli yevklid fazosi: o ‘qitish texnologiyasi asosida yondashuv. In *Innov. Conf. Published online April* (Vol. 17, No. 2025, pp. 1-7).

13. Khaitmirzayevna, Makhmudova D. "Pedagogical Ways of Cognitive Competences in Future Teachers Based on Acmeological Approach." *World Economics and Finance Bulletin*, vol. 32, 23 Mar. 2024, pp. 146-148

14. Abdiqayumov, A., & Maxmudova, D. (2025). Central and parallel projections and their properties. *Теоретические аспекты становления педагогических наук*, *4*(8), 177-184.

15. Abdulhamidova, M., Maxmudova, D. Proyektiv geometriyaning asosiy faktlari. (2026). *Zamonaviy taraqqiyot va fan: 21-asr yondashuvlari*, *6*(1), 282-293. https://journalss.org/index.php/zam/article/view/25424